

1. Geometria płaska – pojęcia wstępne

Tematyka zajęć:

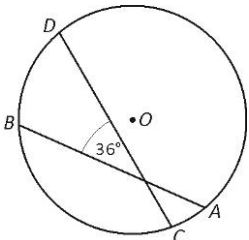
- Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona
- Łamana. Wielokąt. Wielokąt foremny
- Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta
- Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w wielokącie
- Twierdzenie Talesa
- Okrąg i koło
- Kąty i koła

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna figury podstawowe (punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń) i potrafi zapisać relacje między nimi; – zna pojęcie figury wypukłej i wklęsłej; potrafi podać przykłady takich figur; – zna pojęcie figury ograniczonej i figury nieograniczonej, potrafi podać przykłady takich figur; – umie określić położenie prostych na płaszczyźnie; – rozumie pojęcie odległości, umie wyznaczyć odległość dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych; – zna określenie kąta i podział kątów ze względu na ich miarę; – zna pojęcie kątów przyległych i kątów wierzchołkowych oraz potrafi zastosować własności tych kątów w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie dwusiecznej kąta i symetralnej	Uczeń: – potrafi zapisać miarę stopniową kąta, używając minut i sekund; – zna pojęcie łamanej, łamanej zwyczajnej, łamanej zwyczajnej zamkniętej; – zna definicję wielokąta; – zna i potrafi stosować wzór na liczbę przekątnych wielokąta; – wie, jaki wielokąt nazywamy foremnym; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące sumy miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego; – potrafi udowodnić, że suma miar kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego jest stała; – zna definicję wektora na płaszczyźnie (bez układu współrzędnych); – wie, jakie wektory są równe, a jakie przeciwne; – potrafi wektory dodawać, odejmować i mnożyć przez liczbę; – zna prawa dotyczące działań na wektorach;	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i kół, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń; – zna i potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych; – umie udowodnić twierdzenia o kątach środkowych i wpisanych w koło; – umie udowodnić twierdzenie o kącie dopisanym do okręgu; – umie udowodnić własności figur geometrycznych w oparciu o poznane twierdzenia.

odcinka, potrafi zastosować własność dwusiecznej kąta oraz symetralnej odcinka w rozwiązywaniu prostych zadań, – umie skonstruować dwusieczną danego kąta i symetralną danego odcinka; – zna własności kątów utworzonych między dwiema prostymi równoległymi, przeciętymi trzecią prostą i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; potrafi uzasadnić równoległość dwóch prostych, znajdując równe kąty odpowiadające; – zna twierdzenie Talesa; potrafi je stosować do podziału odcinka w danym stosunku, do konstrukcji odcinka o danej długości, do obliczania długości odcinka w prostych zadaniach; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa i potrafi je stosować do uzasadnienia równoległości odpowiednich odcinków lub prostych; – zna wnioski z twierdzenia Talesa i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna definicję koła i okręgu, poprawnie posługuje się terminami: promień, środek okręgu, cięciwa, średnica, łuk okręgu; – potrafi określić wzajemne położenie prostej i okręgu; – zna definicję stycznej do okręgu; – zna twierdzenie o stycznej do okręgu i potrafi je wykorzystywać przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinkach stycznych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – umie określić wzajemne położenie dwóch okręgów; – posługuje się terminami: kąt wpisany w koło, kąt	– potrafi stosować wiedzę o wektorach w rozwiązywaniu zadań geometrycznych; – zna definicję przekształcenia geometrycznego; – wie, co to jest punkt stały przekształcenia geometrycznego; – wie, jakie przekształcenie geometryczne jest tożsamościowe; – wie, jakie przekształcenie geometryczne jest izometrią; – zna definicje i własności takich przekształceń izometrycznych, jak: przesunięcie równoległe o wektor, symetria osiowa względem prostej, symetria środkowa względem punktu; – wie, co to jest oś symetrii figury (figura osiowosymetryczna); – wie, co to jest środek symetrii figury (figura środkowosymetryczna); – zna przekształcenia nieizometryczne – rzut równoległy na prostą oraz powinowactwo prostokątne; – potrafi skonstruować styczną do okręgu, przechodzącą przez punkt leżący w odległości większej od środka okręgu niż długość promienia okręgu; potrafi skonstruować styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący na okręgu; – wie, co to jest kąt dopisany do okręgu; zna twierdzenie o kątach wpisanym i dopisanym do okręgu, opartych na tym samym łuku; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń; – potrafi rozwiązywać zadania złożone,	
---	---	--

środkowy koła; zna twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych i umie je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań.	wymagające wykorzystania równocześnie kilku poznanych własności.	
---	--	--

Przykładowe zadania

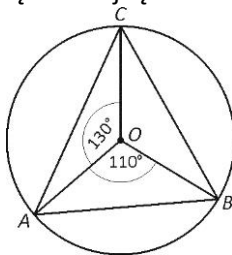
<u>Zadanie 1.</u> Punkt C dzieli odcinek AB długości 24 cm na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy 6 : 2. Jaka jest długość każdego z odcinków? <u>Zadanie 2.</u> Różnica miar dwóch kątów przyległych wynosi 21°. Oblicz miary tych kątów. <u>Zadanie 3.</u> Na płaszczyźnie dane są punkty: A, B, P, Q, przy czym $A \neq B$, $AP = \sqrt{12}$ cm, $BP = 3\sqrt{2}$ cm, $AQ = \frac{49}{9}$ cm, $BQ = 5,4$ cm. Sprawdź, czy punkty P, Q należą do symetralnej odcinka AB. Z jakiej własności symetralnej skorzystasz? <u>Zadanie 4.</u> Dany jest odcinek długości a. Podziel ten odcinek: a) na 5 odcinków równej długości; b) w stosunku 2 : 7. <u>Zadanie 5.</u> W trapezie $ABCD$, $AB \parallel CD$, mamy dane: $AB = 12$ cm, $CD = 7$ cm, $AD = 8$ cm. O ile należy wydłużyć ramię AD, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia BC?	<u>Zadanie 1.</u> W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ dane są: $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AF} = \vec{b}$. Wyraż wektory $\vec{AE}, \vec{BC}, \vec{CF}$ za pomocą wektorów $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, korzystając z działań na wektorach, że symetria środkowa jest izometrią. <u>Zadanie 3.</u> Cięciwy AB i CD przecinają się pod kątem 36°. Wyznacz kąty środkowe, odpowiadające łukom AC i BD, jeżeli stosunek ich długości wynosi 1 : 3.  <u>Zadanie 4.</u> Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce A i B średnicy AB tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i 15 cm. Oblicz długość średnicy AB.	<u>Zadanie 1.</u> Uzasadnij, korzystając z wiadomości o wektorach, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że prawdziwe jest twierdzenie: Jeśli istnieje okrąg, który jest styczny do wszystkich boków czworokąta wypukłego, to sumy długości dwóch przeciwległych boków tego czworokąta są sobie równe. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że jeśli przez wszystkie wierzchołki czworokąta wypukłego można poprowadzić okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe 180°. <u>Zadanie 4.</u> Punkt D leży na łuku BC wewnątrz trójkąta ABC. Wykaż, że suma $\angle ABD + \angle ACD$ jest stała (tzn. nie zależy od położenia punktu D na łuku BC).
---	--	---

Zadanie 6.

Miara kąta utworzonego przez dwa promienie okręgu wynosi 146° . Oblicz miarę kąta, który tworzą styczne poprowadzone przez końce tych promieni.

Zadanie 7.

Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .



Zadanie 8.

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu 2 oraz prosta k , której odległość od punktu O jest równa $4a - 3$.

Wyznacz a tak, aby prosta k była:

- a) styczną do okręgu $o(O, 2)$;
- b) sieczną okręgu $o(O, 2)$;
- c) rozłączną z okręgiem $o(O, 2)$.

Zadanie 5.

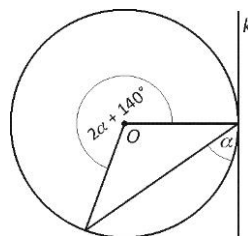
Kąty AOC i BOD są kątami wierzchołkowymi. Wykaż, że przedłużenie dwusiecznej kąta AOC jest dwusieczną kąta BOD .

Zadanie 6.

W trójkącie ABC poprowadzono trzy proste równoległe do podstawy AB , dzielące bok BC na cztery odcinki równej długości. Suma długości odcinków tych prostych zawartych w trójkącie ABC jest o 6 dm większa od długości podstawy AB . Oblicz $|AB|$.

Zadanie 7.

Prosta k jest styczna do okręgu. Oblicz miarę kąta α dopisanego do okręgu:



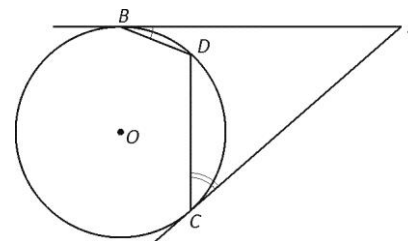
Zadanie 8.

Dane są dwa okręgi $o(A, r_1)$, $o(B, r_2)$ takie, że $r_1 = 3k + 1$, $r_2 = 2k + 3$, $|AB| = 6k - 3$. Określ położenie okręgów, w zależności od parametru k .

Zadanie 9.

Z punktu zewnętrznego A poprowadzono styczne

Czy teza zadania będzie prawdziwa, jeśli punkt D będzie leżał na łuku BC na zewnątrz trójkąta ABC ?



	AB i AC do okręgu o środku w punkcie O (B, C – punkty styczności). Wykaż, że jeśli miara kąta między stycznymi równa się mierze kąta zawartego między promieniami poprowadzonymi ze środka koła do punktów styczności, to czworokąt $ABOC$ jest kwadratem.	
--	--	--

2. Geometria płaska – trójkąty

Tematyka zajęć:

- Podział trójkątów. Suma kątów w trójkącie. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie
- Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa
- Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie
- Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie
- Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt
- Przystawianie trójkątów
- Podobieństwo trójkątów

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział trójkątów ze względu na boki i kąty; – wie, ile wynosi suma miar kątów w trójkącie i w czworokącie; – zna warunek na długość odcinków, z których można zbudować trójkąt; – zna twierdzenie dotyczące odcinka łączącego środki dwóch boków trójkąta i potrafi je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie Pitagorasa i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań;	Uczeń: – zna zależności między bokami w trójkącie (nierówności trójkąta) i stosuje je przy rozwiązywaniu zadań; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie; – zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną; – potrafi obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny i długość	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczących trójkątów, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń; – potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną. – potrafi udowodnić twierdzenie o stycznej i siecznej.

– zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i wykorzystuje je do sprawdzenia, czy dany trójkąt jest prostokątny; – umie określić na podstawie długości boków trójkąta, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny; – umie narysować wysokości w trójkącie i wie, że wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie; – zna twierdzenie o środkowych w trójkącie oraz potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie środka ciężkości trójkąta; – zna twierdzenie o symetralnych boków w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia się dwusiecznych kątów w trójkącie jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna i stosuje przy rozwiązywaniu prostych zadań własności trójkąta równobocznego: długość wysokości w zależności od długości boku, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; – zna i stosuje własności trójkąta prostokątnego: suma miar kątów ostrych trójkąta, długość wysokości w trójkącie prostokątnym równoramiennym w zależności od długości przyprostokątnej; długość promienia okręgu	promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym, mając dane długości boków trójkąta; – potrafi udowodnić proste własności trójkątów, wykorzystując cechy przystawania trójkątów; – potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka; – potrafi uzasadnić, że każdy punkt należący do dwusiecznej kąta leży w równej odległości od ramion tego kąta; – potrafi udowodnić twierdzenie o symetralnych boków i twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – umie udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i okręgów opisanych na trójkącie; – potrafi stosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązania zadań z wykorzystaniem innych, wcześniej poznanych własności; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące trójkątów, z zastosowaniem poznanych do tej pory twierdzeń; – zna twierdzenie o stycznej i siecznej oraz potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań geometrycznych.	
--	--	--

opisanego na trójkącie i długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt w zależności od długości boków trójkąta, zależność między długością środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego a długością przeciwprostokątnej; – zna podstawowe własności trójkąta równoramiennego i stosuje je przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna trzy cechy przystawiania trójkątów i potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna cechy podobieństwa trójkątów; potrafi je stosować do rozpoznawania trójkątów podobnych i przy rozwiązywaniu prostych zadań; – umie obliczyć skalę podobieństwa trójkątów podobnych.		
---	--	--

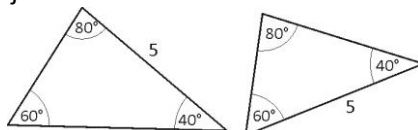
Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest dwa razy większy niż kąt przy wierzchołku. Wyznacz kąty tego trójkąta. <u>Zadanie 2.</u> Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu mierzonej w calach (1 cal = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala. <u>Zadanie 3.</u> Dane są odcinki długości a, b oraz c. Skonstruuuj	<u>Zadanie 1.</u> Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i obrano na przedłużeniach punkty D i E tak, że $AD = AC$ oraz $BE = BC$. Oblicz miarę kąta DCE. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie boki mają długość: 17 cm, 25 cm, 28 cm. a) Sprawdź, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.	<u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta ma długość a. Jaką długość ma wysokość opuszczona na podstawę? <u>Zadanie 3.</u> Niech a, b, c będą długościami boków w dowolnym trójkącie. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.
--	--	--

odcinek długości: $\frac{\sqrt{3}ac}{\sqrt{2}b}$.

Zadanie 4.

Czy poniższe trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 5.

W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm. Punkt D dzieli bok AB na takie dwa odcinki, że $|AD| : |DB| = 3 : 5$. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku AC , która przecięła bok BC w punkcie E . Oblicz długości odcinków: CE , BE i DE .

Zadanie 6.

W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 4 cm. Spodek tej wysokości leży w odległości $1\frac{1}{6}$ cm od środka okręgu opisanego na trójkącie. Oblicz:
a) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie;
b) długość boków tego trójkąta.

Zadanie 7.

W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano dwa okręgi, styczne zewnętrznie do siebie, każdy o promieniu 1 cm (jak na rysunku poniżej).

b) Oblicz długość wysokości poprowadzonej na najdłuższy bok.

c) Podaj długość odcinków, na jakie spodek wysokości podzielił najdłuższy bok trójkąta.

Zadanie 4.

Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równej długości.

Zadanie 5.

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 32$ cm, $|AC| = 24$ cm. Symetralna boku BC przecina ten bok w punkcie D , bok AB w punkcie E i przedłużenie boku AC w punkcie F . Udowodnij, że trójkąt EBD jest podobny do trójkąta EAF i oblicz skalę tego podobieństwa.

Zadanie 6.

Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkty P , Q , R leżą na bokach trójkąta ABC (po jednym na każdym boku) w taki sposób, że każdy bok trójkąta PQR jest prostopadły do jednego boku trójkąta ABC .

a) Wykaż, że trójkąt PQR jest równoboczny.

b) Wyznacz stosunek $\frac{|AB|}{|PQ|}$.

Zadanie 7.

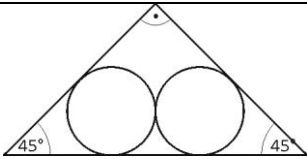
Dany jest okrąg o promieniu 3. Z punktu P oddalonego od środka okręgu o 5 poprowadzono styczną do okręgu oraz sieczną przecinającą okrąg w punktach A i B tak, że $|BP| : |AP| = 3 : 2$.

Zadanie 4.

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = |AC|$ oraz $|\angle ABC| = 3|\angle BAC|$. Wykaż, że jeżeli półproste $BK \rightarrow$ i $BL \rightarrow$ dzielą kąt $\angle ABC$ na trzy równe części ($|\angle LBC| = \frac{1}{3}|\angle ABC|$), to trójkąty BCL , BCK , BKA są równoramienne.

Zadanie 5.

Okręgi o promieniach długości 2 cm i 3 cm są styczne zewnętrznie w punkcie A . Znajdź odległość punktu A od prostej, do której nie należy punkt A , a która jest styczna jednocześnie do obu okręgów.

 Oblicz obwód tego trójkąta.	Oblicz długość odcinka AB.	
--	--	--

3. Trygonometria

Tematyka zajęć:

- Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym
- Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów 30° , 45° , 60°
- Kąt skierowany
- Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne
- Wzory redukcyjne

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków; – potrafi korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); – zna wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne; – potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach 30°,	Uczeń: – zna pojęcie kąta skierowanego; – wie, co to jest miara główna kąta skierowanego i potrafi ją wyznaczyć dla dowolnego kąta; – zna definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dowolnego kąta; – umie podać znaki wartości funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach; – potrafi obliczyć, na podstawie definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 210°, 240°, 315°, 330° itd.; – umie zbudować w układzie współrzędnych	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie sinusów; – potrafi udowodnić twierdzenie cosinusów; – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.

45°, 60°; – zna definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dowolnego kąta wypukłego; – potrafi wyznaczyć (korzystając z definicji) wartości funkcji trygonometrycznych takich kątów wypukłych, jak: 120°, 135°, 150°; – zna znaki funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych, różnych od 90°; zna wartości funkcji trygonometrycznych (o ile istnieją) kątów o miarach: 0°, 90°, 180°; – potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego, gdy dana jest jedna z nich; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (w odniesieniu do kąta wypukłego): $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$ – zna wzory redukcyjne dla kąta $90^\circ - \alpha$, $90^\circ + \alpha$ oraz $180^\circ - \alpha$; – potrafi stosować poznane wzory redukcyjne w obliczaniu wartości wyrażeń; – potrafi zastosować poznane wzory redukcyjne w zadaniach geometrycznych; – potrafi zbudować kąt wypukły znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.	dowolny kąt o mierze α, gdy dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej tego kąta; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (dla dowolnego kąta, dla którego funkcje trygonometryczne są określone) – zna i potrafi stosować wzory redukcyjne; – potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne; – zna twierdzenie sinusów i potrafi je stosować w zadaniach geometrycznych; – zna twierdzenie cosinusów i potrafi stosować je w zadaniach geometrycznych; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności, wykorzystując także wcześniej poznaną wiedzę o figurach geometrycznych.	
---	---	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u>	<u>Zadanie 1.</u>	<u>Zadanie 1.</u>
-------------------	-------------------	-------------------

Oblicz wartość wyrażenia: $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie prostokątnym ABC dane są: długość przeciwprostokątnej $BC = \sqrt{146}$ cm oraz długość przyprostokątnej $AB = 5$ cm. a) Oblicz długość drugiej przyprostokątnej. b) Oblicz miary kątów ostrych trójkąta (skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych). c) Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną oraz cosinus kąta, jaki tworzy ta wysokość z krótszą przyprostokątną. <u>Zadanie 3.</u> Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma wieża? <u>Zadanie 4.</u> Wyznacz, korzystając z definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°. <u>Zadanie 5.</u> Oblicz, stosując odpowiednie wzory redukcyjne, wartość wyrażenia: a) $\sin 135^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$ b) $\sin^2 17^\circ + \sin^2 73^\circ - \cos 120^\circ$. <u>Zadanie 6.</u> Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora:	Zbuduj kąt o mierze α takiej, że a) $\sin \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{7}$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α. <u>Zadanie 2.</u> Posługując się wzorem $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, oblicz $\sin 15^\circ$. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie prostokątnym a, b oznaczają długości przyprostokątnych, α jest miarą kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości a. Wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, oblicz: a) tangens α; b) wartość wyrażenia: $\frac{b}{a+b} + \frac{a^2}{a^2 - b^2}$. <u>Zadanie 4.</u> Sprawdź, czy równość $\frac{\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia. <u>Zadanie 5.</u> Oblicz wartość wyrażenia: $\sin 960^\circ \cdot \operatorname{tg} 420^\circ - \cos 1410^\circ$. <u>Zadanie 6.</u>	Wiedząc, że $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz: a) $\sin \alpha - \cos \alpha$, b) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$; c) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$. <u>Zadanie 2.</u> Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się na wysokości h metrów nad ziemią, osoba leżąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie t sekund - powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością v wznosi się balon? <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta oraz $a < \frac{b+c}{2}$, to miary kątów α, β, γ, leżących naprzeciw tych boków, spełniają nierówność $\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$.
---	--	---

$\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ$. <u>Zadanie 7.</u> Niech α, β, γ oznaczają miary kątów dowolnego trójkąta. Wykaż, że prawdziwa jest zależność: $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta + \gamma}{2}.$ <u>Zadanie 8.</u> Zbuduj kąt o mierze α, $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ takiej, że a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $\operatorname{ctg} \alpha = -4$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α. <u>Zadanie 9.</u> Oblicz wartość wyrażenia $\frac{5 \sin \alpha - 4 \cos \alpha}{3 \cos \alpha + 8 \sin \alpha}$ wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.	Oblicz długość środkowej CD w trójkącie ABC, jeśli dane są długości boków trójkąta: $a = 5$, $b = 6$, $c = 10$. <u>Zadanie 7.</u> W trójkącie ABC dane są długości boków: $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3 - \sqrt{3}$. Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta oraz promień koła opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 8.</u> W pewnym trójkącie miary kątów α, β, γ spełniają warunek: $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$. Wykaż, że trójkąt ten jest prostokątny.	
--	---	--

4. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta

Tematyka zajęć:

- Pole figury geometrycznej
- Pole trójkąta, cz. 1
- Pole trójkąta, cz. 2
- Pola trójkątów podobnych
- Pole koła, pole wycinka koła

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
----------------------	------------------------	------------------------

Uczeń: – rozumie pojęcie pola figury; zna wzór na pole kwadratu i pole prostokąta; – zna następujące wzory na pole trójkąta: $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ gdzie } a - \text{długość boku trójkąta równobocznego}$ $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a,$ $P = a \cdot b \cdot \sin \gamma, \text{ gdzie } \gamma \in (0^\circ, 180^\circ)$ $P = \frac{abc}{4R},$ $P = \frac{1}{2} p \cdot r, \text{ gdzie } p = \frac{a+b+c}{2}$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ gdzie } p = \frac{a+b+c}{2};$ – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na pole trójkąta i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi obliczyć wysokość trójkąta, korzystając ze wzoru na pole; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz własności okręgu wpisanego w trójkąt i okręgu opisanego na trójkącie; – zna twierdzenie o polach figur podobnych; potrafi je stosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna wzór na pole koła i pole wycinka koła; umie zastosować te wzory przy rozwiązywaniu prostych zadań;	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na pole trójkąta równobocznego i wzory: $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r, \text{ gdzie } p = \frac{a+b+c}{2}, \text{ ze wzoru}$ $P = \frac{1}{2} a h_a;$ – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, stosując wzory na pola trójkątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej własności trójkątów; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne, wykorzystując cechy podobieństwa trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych; – rozwiązuje zadania dotyczące trójkątów, w których wykorzystuje twierdzenia poznane wcześniej (tw. Pitagorasa, tw. Talesa, tw. sinusów, tw. cosinusów, twierdzenia o kątach w kole, itp.) – potrafi dowodzić twierdzenia, w których wykorzystuje pojęcie pola.	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie Talesa z wykorzystaniem pól odpowiednich trójkątów; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń.
---	---	--

– wie, że pole wycinka koła jest wprost proporcjonalne do miary odpowiadającego mu kąta środkowego koła i jest wprost proporcjonalne do długości odpowiadającego mu łuku okręgu oraz umie zastosować tę wiedzę przy rozwiązywaniu prostych zadań.		
---	--	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 1,12 m i polu 504 cm^2 wycięto koło, styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła. <u>Zadanie 2.</u> Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz: a) pole trójkąta; b) długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; c) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie dwa boki mają długość 12 cm i 10 cm, zaś kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 150°. Oblicz pole tego trójkąta. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają	<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie, którego pole jest równe 27 cm^2, dwa boki mają długość 18 cm i 6 cm. a) Jaką miarę ma kąt zawarty między tymi bokami? b) Oblicz długość trzeciego boku trójkąta. c) Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Pamiętaj o rozważeniu dwóch przypadków. <u>Zadanie 3.</u> Na trójkącie ABC, w którym $AC = BC$, opisano okrąg o środku O i promieniu $R = 20 \text{ cm}$. Wiedząc, że $\angle AOB = 120^\circ$, oblicz pole trójkąta oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Rozważ dwa przypadki. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie równoramiennym podstawa ma 16 cm długości, a ramię ma 17 cm długości. Oblicz odleg-	<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD oraz CE, które przecięły się w punkcie M. Wiedząc, że $AD \cdot CE = \sqrt{3}$ oraz $\angle MAC + \angle ACM = 60^\circ$ wykaż, że pole trójkąta ABC wynosi 1. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz długość boku c trójkąta, jeśli dane są długości a, b dwóch jego boków oraz wiadomo, że $h_a + h_b = h_c$, gdzie h_a, h_b, h_c są długościami wysokości opuszczonych na odpowiednie boki tego trójkąta. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt prostokątny jest styczny do przeciwprostokątnej w punkcie dzielącym ją na dwa odcinki, których iloczyn długości jest równy polu tego trójkąta. <u>Zadanie 4.</u> Wykaż, że pole trójkąta wyraża się wzorem:
--	--	---

długość 6 cm i 8 cm. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej. <u>Zadanie 5.</u> Kąt wpisany w koło ma miarę 45° i jest oparty na łuku długości 3π cm. Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten łuk. <u>Zadanie 6.</u> Trójkąt równoboczny $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $s = 3$. Pole trójkąta ABC jest równe $4\sqrt{3}$ cm². Oblicz długość boku trójkąta $A'B'C'$.	łość środka wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta od ramienia trójkąta. <u>Zadanie 5.</u> Prosta równoległa do podstawy AB trójkąta ABC, przecinająca ramiona AC i BC odpowiednio w punktach D i E, dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. W jakim stosunku (licząc od wierzchołka C) dzieli ona ramiona trójkąta? <u>Zadanie 6.</u> W wycinek koła o promieniu 6 cm wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole wycinka koła. <u>Zadanie 7.</u> W trójkącie ABC dane są: $\angle ACB = 120^\circ$, $AC = b$, $BC = a$. Wykaż, że odcinek dwusiecznej kąta ACB zawarty w trójkącie ma długość $\frac{a \cdot b}{a + b}$.	$P = \frac{abc}{4R}$, gdzie a, b, c oznaczają długości boków trójkąta, R – długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 5.</u> W trójkącie rozwartokątnym ABC (kąt BCA jest rozwarty) długości boków wynoszą: $AB = c$, $AC = b$ oraz $BC = a$, gdzie $0 < a < b < c$. Pole tego trójkąta wynosi 3. Wykaż, że $AC > \sqrt{6}$.
---	---	---

5. Geometria płaska – czworokąty

Tematyka zajęć:

- Podział czworokątów. Trapezoidy
- Trapezy
- Równoległoboki
- Okrąg opisany na czworokącie
- Okrąg wpisany w czworokąt
- Okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt – zadania na dowodzenie
- Podobieństwo. Figury podobne
- Podobieństwo czworokątów

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział czworokątów; – potrafi wyróżnić wśród trapezów: trapezy prostokątne i trapezy równoramienne; poprawnie posługuje się takimi określeniami, jak: podstawa, ramię, wysokość trapezu; – wie, że suma kątów przy każdym ramieniu trapezu jest równa 180° i umie tę własność wykorzystać w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu i umie zastosować je w rozwiązywaniu	Uczeń: – umie na podstawie własności czworokąta podanych w zadaniu wywnioskować, jaki to jest czworokąt; – umie udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki przekątnych trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków; – potrafi stosować twierdzenia o okręgu wpisanym w	Uczeń: – umie udowodnić twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące czworokątów, czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, korzystając przy tym z wcześniej poznanych twierdzeń.

prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności trapezów; – zna podstawowe własności równoległoboków i umie je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – wie, jakie własności ma romb; – zna własności prostokąta i kwadratu; – wie, co to są trapezoidy, potrafi podać przykłady takich figur; – zna własności deltoidu; – rozumie, co to znaczy, że czworokąt jest wpisany w okrąg, czworokąt jest opisany na okręgu; – zna warunki, jakie musi spełniać czworokąt, aby można było okrąg wpisać w czworokąt oraz aby można było okrąg opisać na czworokącie; potrafi zastosować te warunki w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi wymienić nazwy czworokątów, w które można wpisać, i nazwy czworokątów, na których można opisać okrąg; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych własności trapezu; – korzysta z wcześniej zdobytej wiedzy do rozwiązywania zadań dotyczących czworokątów (trygonometria, twierdzenie Talesa, twierdzenie Pitagorasa, własności trójkątów itp.); – zna i rozumie definicję podobieństwa; – potrafi wskazać figury podobne; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące podobieństwa czworokątów.	czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie, w rozwiązywaniu złożonych zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie do rozwiązania zadań o średnim stopniu trudności dotyczących trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu; – potrafi wyprowadzić wzór na pole czworokąta opisanego na okręgu w zależności od długości promienia okręgu i obwodu tego czworokąta; – korzysta z wcześniej poznanych twierdzeń (np. twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów) do rozwiązywania zadań dotyczących czworokątów.	
---	---	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Z kawałka materiału mającego kształt trapezu prostokątnego o podstawach długości 1,2 m i 0,4 m oraz wysokości 1,5 m wycięto chorągiewkę w kształcie trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest dłuższe ramię trapezu, a jeden z wierzchołków należy do krótszego ramienia trapezu. a) Wyznacz długości odcinków, na jakie ten wierzchołek podzielił krótsze ramię trapezu. b) Oblicz długości boków chorągiewki. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01 m. <u>Zadanie 2.</u> W równoległoboku $ABCD$ wysokość DE o długości 8 cm dzieli bok AB na odcinki długości: $AE = 4,5$ cm, $EB = 6$ cm. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.	<u>Zadanie 1.</u> Uzasadnij, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że środki przekątnych trapezoidu i środki dwóch przeciwległych jego boków są wierzchołkami równoległoboku. <u>Zadanie 3.</u> W trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, wpisano okrąg o środku O. Uzasadnij, że $\angle BOC = 90^\circ$. <u>Zadanie 4.</u> W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej, a długość drugiej podstawy jest	<u>Zadanie 1.</u> W danym okręgu punkt A jest środkiem łuku BC, a dwie dowolne cięciwy AD, AE przecinają cięciwę BC w punktach B_1 i C_1. Wykaż, że wówczas na czworokącie B_1C_1ED można opisać okrąg.
---	---	---

<u>Zadanie 3.</u> Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 8 cm. Wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg, oblicz obwód trapezu. <u>Zadanie 4.</u> W równoległoboku $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy od boku AD. Na boku AB zaznaczono punkt K, a na boku DC – punkt L w taki sposób, że czworokąt $AKLD$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$. Wyznacz skalę tego podobieństwa. Oblicz stosunek $AK : KB$.	połową długości ramienia. Wykaż, że w ten trapez można wpisać okrąg.	
--	---	--

6. Geometria płaska – pole czworokąta

Tematyka zajęć:

- Pole prostokąta. Pole kwadratu
- Pole równoległoboku. Pole rombu
- Pole trapezu
- Pole czworokąta – zadania różne
- Pola figur podobnych
- Mapa. Skala mapy

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi zastosować wzory na pole kwadratu i prostokąta w rozwiązaniach prostych zadań; – zna wzory na pole równoległoboku; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące równoległoboków, wykorzystując wzór na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – zna wzory na pole rombu; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące rombów, wykorzystując wzory na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – zna wzór na pole trapezu; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trapezów, wykorzystując wzór na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące czworokątów, wykorzystując wzory na ich	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na pole równoległoboku; – potrafi wyprowadzić wzory na pole rombu; – potrafi wyprowadzić wzór na pole trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, wykorzystując wzory na pola trójkątów i czworokątów, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń (np. twierdzenia sinusów i cosinusów, twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i opisanym na czworokącie).	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń.

pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i opisanym na czworokącie; – zna związek między polami figur podobnych i potrafi korzystać z tego związku, rozwiązując zadania geometryczne o niewielkim stopniu trudności.		
---	--	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Przekątna kwadratu jest o 2 cm dłuższa od boku tego kwadratu. Oblicz pole kwadratu. <u>Zadanie 2.</u> Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne długości 13 cm i 8 cm przecinają się pod kątem 60°. <u>Zadanie 3.</u> W równoległoboku $ABCD$ przekątne AC i DB przecinają się w punkcie S. a) Wykaż, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery	<u>Zadanie 1.</u> W równoległobok o krótszym boku długości 5 dm wpisano dwa jednakowe koła o promieniu długości 2 dm, każde styczne do trzech boków równoległoboku i styczne do siebie. Oblicz obwód i pole równoległoboku. <u>Zadanie 2.</u> Romb o boku długości 18 cm podzielono na trzy części o równych polach prostymi przechodzącymi przez wierzchołek kąta ostrego. Oblicz długości odcinków, na jakie te proste podzieliły boki rombu.	<u>Zadanie 1.</u> W równoległoboku $ABCD$ są dane: $AB = 18$, $BC = 10$ oraz $\angle ABC = 120^\circ$. Punkt K należy do boku AB i $AK = 12$. Punkt L jest środkiem boku BC. Proste CK i DL przecinają się w punkcie M. Oblicz pole czworokąta $KBLM$.
---	--	---

razy większe od pola trójkąta ASD. b) Wiedząc dodatkowo, że pole trójkąta ASD jest o 15 cm^2 mniejsze od pola równoległoboku $ABCD$, oblicz pole tego równoległoboku. <u>Zadanie 4.</u> Przekątne rombu mają długość 10 cm i 24 cm. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu i na tej podstawie ustal, czy kąt ostry rombu ma miarę większą od 45°, czy mniejszą. <u>Zadanie 5.</u> Obwód czworokąta jest równy 54 cm. W czworokąt ten wpisano koło o promieniu 4 cm. Oblicz pole danego czworokąta. <u>Zadanie 6.</u> Czworokąty F_1 i F_2 są podobne. Obwód czworokąta F_1 jest o 15% większy od obwodu czworokąta F_2. O ile procent pole czworokąta F_1 jest większe od pola czworokąta F_2?	<u>Zadanie 3.</u> Pola trójkątów, których podstawami są podstawy trapezu, a wspólnym wierzchołkiem jest punkt przecięcia się przekątnych tego trapezu, są równe P_1 i P_2. Oblicz pole trapezu. <u>Zadanie 4.</u> Na okręgu opisano trapez prostokątny. Odległości środka okręgu od końców dłuższego ramienia są równe 3 cm i 7 cm. Oblicz pole trapezu.	
---	--	--

7. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Tematyka zajęć:

- Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie
- Funkcja wykładnicza i jej własności
- Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych
- Równania wykładnicze
- Nierówności wykładnicze
- Zastosowanie równań i nierówności wykładniczych w rozwiązywaniu zadań
- Logarytm – powtórzenie wiadomości
- Funkcja logarytmiczna i jej własności
- Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej
- Rozwiązywanie równań, nierówności oraz układów równań z zastosowaniem wykresu funkcji logarytmicznej
- Równania logarytmiczne
- Nierówności logarytmiczne
- Równania i nierówności logarytmiczno-wykładniczo-potęgowe
- Zastosowanie równań i nierówności logarytmicznych w rozwiązywaniu zadań
- Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym; – stosuje własności działań na potęgach	Uczeń: – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych z wartością bezwzględną; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych z	Uczeń: – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z parametrem;

w rozwiązywaniu zadań; – zna definicję funkcji wykładniczej; – potrafi odróżnić funkcję wykładniczą od innych funkcji; – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw; – potrafi opisać własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu; – potrafi przekształcać wykresy funkcji wykładniczych (S_{Ox}, S_{Oy}, $S_{(0,0)}$), przesunięcie równoległe o dany wektor); – potrafi rozwiązywać graficznie równania, nierówności oraz układy równań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych; – zna pojęcie równania wykładniczego oraz nierówności wykładniczej; – potrafi rozwiązywać algebraicznie i graficznie proste równania oraz nierówności wykładnicze; – potrafi obliczyć logarytm liczby dodatniej; – zna i potrafi stosować własności logarytmów do obliczania wartości wyrażeń; – zna definicję funkcji logarytmicznej; – potrafi odróżnić funkcję logarytmiczną od innej funkcji; – potrafi określić dziedzinę funkcji logarytmicznej; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw; – potrafi opisać własności funkcji logarytmicznej na podstawie jej wykresu; – potrafi przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych (S_{Ox}, S_{Oy}, $S_{(0,0)}$), przesunięcie równoległe o dany wektor);	wartością bezwzględną; – potrafi interpretować graficznie równania wykładnicze z parametrem; – potrafi interpretować graficznie równania logarytmiczne z parametrem; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze oraz logarytmiczne z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych; – potrafi rozwiązywać równania wykładniczo-potęgowo-logarytmiczne; – potrafi dowodzić własności logarytmów; – potrafi naszkicować zbiór punktów płaszczyzny spełniających dane równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi, w których występują logarytmy; – potrafi badać, na podstawie definicji, własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych (np. parzystość, nieparzystość, monotoniczność); – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o średnim stopniu trudności), w których wykorzystuje wiadomości dotyczące funkcji wykładniczej i logarytmicznej; – potrafi stosować wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej w różnych	– potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z parametrem; – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o podwyższonym stopniu trudności), w których wykorzystuje własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych.
---	---	---

– potrafi graficznie rozwiązywać równania, nierówności oraz układy równań z zastosowaniem wykresów funkcji logarytmicznych; – potrafi algebraicznie rozwiązywać proste równania oraz nierówności logarytmiczne; – rozwiązuje zadania tekstowe osadzone w kontekście praktycznym, w których wykorzystuje umiejętność rozwiązywania prostych równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych (lokaty bankowe, rozpad substancji promieniotwórczych itp.) – posługuje się funkcjami wykładniczymi oraz funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych itp.	zadaniach (np. dotyczących ciągów, szeregów, trygonometrii, itp.).	
--	---	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że jeśli $a = \log_{45} 3$ to $\log_3 5 = \frac{1-2a}{a}$. <u>Zadanie 2.</u> a) Rozwiąż graficznie równanie $3^x - 1 = -2x^2 + 4x$.	<u>Zadanie 1.</u> a) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \left \log_2 \frac{x-2}{x^2-4} \right$. b) Naszkicuj wykres funkcji f. c) Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $\left \log_2 \frac{x-2}{x^2-4} \right = m^2 - 2$	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $\log[(m + 4)x] = \log(x^2 + 2x)$ ma tylko jedno rozwiązanie, które jest liczbą ujemną.
---	--	---

b) Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{x-1} > \log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{x+1}$. c) Rozwiąż równanie $\log(x+3) - \log 0,4 = 2\log(x-2)$. <u>Zadanie 3.</u> Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-1}(x^2-2x-3).$ <u>Zadanie 4.</u> Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 1 - \log_2(x+3)$ i na jego podstawie omów własności funkcji f. <u>Zadanie 5.</u> Pan Kowalski złożył w banku pewną kwotę K_0 [zł] na procent składany w wysokości 4% rocznie przy kapitalizacji kwartalnej. Oblicz, po ilu latach kwota ta podwoi się. Uwzględnij 18% podatek od odsetek.	ma dokładnie jedno rozwiązanie. <u>Zadanie 2.</u> Rozwiąż równanie i nierówność: a) $\frac{1}{4}\sqrt{12-3^{x+1}} = 3^x - 3^{x-1} - 3^{x-2} - 3^{x-3} + \dots$ b) $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$. <u>Zadanie 3.</u> W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunek: $\log_{x+1}(y-4) < 1.$ <u>Zadanie 4.</u> Zbadaj parzystość (nieparzystość) funkcji $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}).$	<u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 \geq 4,4.$
--	---	---

Zadanie 5.

Rozwiąż nierówność:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x - 1)} > 1 \text{ w zbiorze } (0, 2\pi).$$

8. Geometria analityczna

Tematyka zajęć:

- Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka
- Kąt między niezerowymi wektorami
- Równanie kierunkowe prostej
- Równanie ogólne prostej
- Kąt między prostymi
- Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi
- Pole trójkąta. Pole wielokąta
- Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło
- Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu
- Wzajemne położenie dwóch okręgów
- Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych
- Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązaniach zadań z geometrii analitycznej

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – stosuje informacje zdobyte w klasie pierwszej, dotyczące wektora w układzie współrzędnych, w rozwiązywaniu zadań; – potrafi wyznaczyć współrzędne środka odcinka; – potrafi obliczyć długość odcinka, znając współrzędne jego końców; – zna definicję kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – zna i potrafi stosować w zadaniach wzory na cosinus i sinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – zna warunki na prostopadłość i równoległość wektorów i potrafi je zastosować w zadaniach;	Uczeń: – rozwiązuje zadania, dotyczące wektorów, w których występują parametry; – rozwiązuje zadania z geometrii analitycznej (o średnim stopniu trudności), w rozwiązaniach których sprawnie korzysta z poznanych wzorów; – potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych, w których konieczne jest zastosowanie wiadomości z różnych działów matematyki; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych.; – stosuje rachunek pochodnych w rozwiązaniach zadań z geometrii analitycznej.	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzory na sinus i cosinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – potrafi wyprowadzić wzory na tangens kąta utworzonego przez dwie proste dane równaniami kierunkowym (ogólnymi); – potrafi wyprowadzić wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej o podwyższonym stopniu trudności .

– zna definicję równania kierunkowego prostej oraz znaczenie współczynników występujących w tym równaniu; – potrafi napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez dwa dane punkty oraz równanie kierunkowe prostej, znając jej kąt nachylenia do osi OX i współrzędne punktu, który do należy tej prostej; – zna definicję równania ogólnego prostej; – potrafi napisać równanie ogólne prostej przechodzącej przez dwa punkty; – zna i potrafi stosować w zadaniach warunek na równoległość oraz prostopadłość prostych danych równaniami kierunkowymi (ogólnymi); – potrafi obliczyć (korzystając z poznanych wzorów) miarę kąta, jaki tworzą dwie proste przecinające się; – zna i potrafi stosować w zadaniach, wzór na		
--	--	--

odległość punktu od prostej; – potrafi obliczyć odległość między dwiema prostymi równoległymi: – potrafi obliczyć pole trójkąta oraz dowolnego wielokąta, gdy dane są współrzędne jego wierzchołków; – rozpoznaje równanie okręgu w postaci zredukowanej oraz w postaci kanonicznej; – potrafi sprowadzić równanie okręgu z postaci zredukowanej do postaci kanonicznej (i odwrotnie); – potrafi odczytać z równania okręgu współrzędne środka i promień okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu, gdy zna współrzędne środka i promień tego okręgu; – rozpoznaje nierówność opisującą koło; – potrafi odczytać z nierówności opisującej koło współrzędne środka i promień tego koła; – potrafi napisać nierówność opisującą koło w sytuacji, gdy zna współrzędne środka i promień koła; – potrafi narysować w układzie współrzędnych okrąg na podstawie danego równania opisującego okrąg; – potrafi narysować w układzie współrzędnych koło na podstawie danej nierówności opisującej koło; – potrafi określić wzajemne położenie prostej o danym równaniu względem okręgu o danym równaniu (po		
--	--	--

wykonaniu stosownych obliczeń); – potrafi określić wzajemne położenie dwóch okręgów danych równaniami (na podstawie stosownych obliczeń); – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu lub stwierdzić, że prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych; – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów (lub stwierdzić, że okręgi nie przecinają się), gdy znane są równania tych okręgów; – potrafi wyznaczyć równanie stycznej do okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu opisanego na trójkącie, gdy dane ma współrzędne wierzchołków trójkąta; – potrafi rozwiązywać proste zadania z wykorzystaniem wiadomości o prostych, trójkątach, parabolach i okręgach; – zna pojęcie jednokładności o środku S i skali $k \neq 0$ (także w ujęciu analitycznym); – zna własności figur jednokładnych; – potrafi rozwiązywać proste zadania z zastosowaniem jednokładności.		
---	--	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Oblicz sumę sinusów kątów wewnętrznych trójkąta o wierzchołkach $A(1, -4)$, $B(6, 3)$, $C(2, 5)$.	<u>Zadanie 1.</u> Dane są wektory $\vec{u} = [-5, 3]$, $\vec{v} = [2, -1]$, $\vec{p} = [1, 4]$. Wykaż, że jeśli	<u>Zadanie 1.</u> Przez punkt $A = (0, 1)$ poprowadzono styczne do okręgu $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$. Znajdź równanie krzywej, którą tworzą
--	--	---

<u>Zadanie 2.</u> Prosta k jest nachylona do osi OX pod kątem $\alpha = 60^\circ$ i przechodzi przez punkt $A(5, 3)$. Napisz równanie ogólne i kierunkowe tej prostej. <u>Zadanie 3.</u> Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A(2, 1)$, $B(6, -2)$, $C(4, 3)$, $D(0, 8)$. - Oblicz pole tego czworokąta. - Oblicz odległość wierzchołka B od boku AD. - Oblicz miarę kąta ostrego, jaki tworzą przekątne tego czworokąta (wynik podaj z dokładnością do 1°). <u>Zadanie 4.</u> Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(1, 5)$, $B(8, -2)$, $C(9, 1)$. - Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku $S(1, 3)$ i skali $k = -2$. - Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$.	wektory $\vec{u} + a \cdot \vec{v}$ oraz $\vec{p}$ są prostopadłe, to $a = 3,5$. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P(-5, 16)$, która tworzy z osią odciętych kąt o mierze dwa razy większej od kąta, jaki tworzy z tą osią prosta k o równaniu $y = \frac{2}{3}x - 1$. <u>Zadanie 3.</u> Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów stycznych do prostej $k: y = 0$ i jednocześnie stycznych zewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4x$. <u>Zadanie 4.</u> Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) okręgi opisane równaniami $o_1: (x - m)^2 + (y + 2)^2 = 20$ oraz $o_2: (x + 1)^2 + (y - 2m)^2 = 5$ są wewnętrznie styczne? Dla znalezionych wartości parametrów wykonaj	środki wszystkich cięciw danego okręgu wyznaczonych przez proste przechodzące przez punkt A.
---	---	--

<u>Zadanie 5.</u> Określ wzajemne położenie prostej $k: y = \frac{1}{2}x$ względem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x = 0$. <u>Zadanie 6.</u> Napisz równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ przechodzących przez punkt $A(-4, 3)$.	rysunek. Oblicz współrzędne punktu styczności. <u>Zadanie 5.</u> Wykres funkcji $y = x - 2$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ w punktach A i B. a) Oblicz współrzędne punktów A i B. b) Wykaż, że trójkąt ABC, gdzie S jest środkiem okręgu, jest prostokątny. c) Oblicz pole figury $F = F_1 \cap F_2$, gdzie $F_1 = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x^2 + y^2 - 4x - 4 \leq 0\},$ a $F_2 = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge y \leq x - 2 \}$. <u>Zadanie 6.</u> Na gałęzi hiperboli o równaniu $f(x) = \frac{4}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty),$ wyznacz współrzędne takiego punktu P, którego odległość od punktu $A(-3, 3)$ jest najmniejsza.	
--	---	--

9. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Tematyka zajęć:

- Reguła mnożenia i reguła dodawania
- Wariacje
- Permutacje
- Kombinacje
- Kombinatoryka – zadania różne
- Doświadczenie losowe
- Zdarzenia. Działania na zdarzeniach
- Określenie prawdopodobieństwa
- Prawdopodobieństwo klasyczne
- Doświadczenia losowe wieloetapowe
- Prawdopodobieństwo warunkowe
- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym
- Niezależność zdarzeń

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna regułę dodawania oraz regułę mnożenia; – zna pojęcie permutacji zbioru i umie stosować wzór na liczbę permutacji; – zna pojęcie wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń i umie stosować wzory na liczbę takich wariacji; – zna pojęcie kombinacji i umie stosować wzór na liczbę kombinacji; – umie rozwiązywać proste zadania kombinatoryczne z zastosowaniem poznanych wzorów; – zna terminy: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, zdarzenia wykluczające się; – potrafi określić zbiór wszystkich zdarzeń danego doświadczenia losowego, obliczyć jego moc oraz obliczyć liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu; – potrafi stosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa w rozwiązaniach zadań; – zna i rozumie aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa; – zna własności prawdopodobieństwa i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – rozwiązuje zadania za pomocą drzewa stochastycznego; – zna określenie prawdopodobieństwa warunkowego	Uczeń: – umie rozwiązywać zadania kombinatoryczne o średnim stopniu trudności; – umie udowodnić własności prawdopodobieństwa; – umie stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań „teoretycznych”; – zna i potrafi stosować wzór Bayesa; – wie i rozumie na czym polega niezależność n zdarzeń ($n \geq 2$).	Uczeń: – potrafi udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa; – potrafi udowodnić wzór na prawdopodobieństwo całkowite; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa.

i umie rozwiązywać proste zadania dotyczące takiego prawdopodobieństwa; – zna wzór na prawdopodobieństwo całkowite i potrafi go stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – wie, jakie zdarzenia nazywamy niezależnymi; potrafi zbadać, posługując się definicją, czy dwa zdarzenia są niezależne; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące niezależności zdarzeń.		
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> a) Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których suma cyfr jest równa 4? b) Ile różnych kodów można otrzymać, przedstawiając litery wyrazu KATASTROFA. <u>Zadanie 2.</u> Z grupy 6 kobiet i 8 mężczyzn wybieramy losowo cztery osoby. Ile jest takich sposobów wyboru, aby wśród wybranych osób: a) były same kobiety,	<u>Zadanie 1.</u> W przedziale wagonu kolejowego są ustawione naprzeciw siebie dwie ławki. Każda ma 5 numerowanych miejsc. Do przedziału weszło pięć osób. Trzy osoby siadły na jednej ławce, pozostałe – na drugiej, naprzeciwko dwóch osób z pierwszej ławki. Ile jest takich rozmieszczeń osób w przedziale? <u>Zadanie 2.</u> Ile jest funkcji ściśle monotonicznych przekształcających zbiór k – elementowy w zbiór	<u>Zadanie 1.</u> Ile rozwiązań ma równanie $x + y + z + t = 25$ a) w zbiorze liczb naturalnych dodatnich; b) w zbiorze liczb naturalnych?

b) były dwie kobiety i dwóch mężczyzn? <u>Zadanie 3.</u> Sześcian pomalowano, a następnie rozcięto na 1000 jednakowych sześcianików, które wrzucono do pudełka i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego pudełka jednego sześcianika, który: a) będzie miał dwie ściany pomalowane, b) będzie miał jedną ścianę lub dwie ściany pomalowane. <u>Zadanie 4.</u> Na stu mężczyzn – pięciu, a na tysiąc kobiet – dwie, to daltoniści. Z grupy, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi 3 : 7, wylosowano jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to daltonista? <u>Zadanie 5.</u> Rzucamy dwiema kostkami do gry. Czy niezależne są	n – elementowy ($k \leq n$)? <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że jeśli $P(A) = 0,25$ i $P(B) = \frac{1}{3}$, to $\frac{1}{3} \leq P(A \cup B) \leq \frac{7}{12} \text{ oraz } P(A \cap B) \leq \frac{1}{4}.$ <u>Zadanie 4.</u> Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, \dots, 18, 19, 20\}$ losujemy trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma tych liczb jest podzielna przez 3, jeśli wiadomo, że co najmniej jedna z tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. <u>Zadanie 5.</u> Do sklepu dostarczają żarówki energooszczędne dwa zakłady, będące częściami tej samej firmy, przy czym pierwszy z nich dostarcza trzy razy więcej żarówek niż drugi. W pierwszym z tych zakładów mają wady średnio 3 żarówki na 1000 wyprodukowanych, a w drugim 7 na 1000 wyprodukowanych. Klient kupił żarówkę, na której widniał tylko znak firmy, a nie	
---	---	--

następujące zdarzenia: A – na obu kostkach wypadła nieparzysta liczba oczek, B – na drugiej kostce wypadła liczba oczek podzielna przez trzy?	zakładu, który ją wyprodukował. Żarówka ta w okresie gwarancji zepsuła się. Do którego zakładu sklep raczej powinien się zwrócić z reklamacją?	
--	---	--

10. Elementy statystyki opisowej.

Tematyka zajęć:

- Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej
- Średnia z próby
- Mediana z próby i moda z próby
- Wariancja i odchylenie standardowe

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podstawowe pojęcia statystyki opisowej: obserwacja statystyczna, populacja generalna, próba, liczebność próby, cecha statystyczna (mierzalna, niemierzalna) itp.; – potrafi odczytywać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów oraz interpretować te dane; – potrafi określać zależności między odczytanymi danymi; – potrafi przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów; – potrafi obliczać średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe z próby; – potrafi interpretować wymienione wyżej parametry statystyczne.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania ze statystyki opisowej o średnim stopniu trudności.	

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u>	<u>Zadanie 1.</u>	
-------------------	-------------------	--

Pięćdziesiąt osób zdawało egzamin z przepisów ruchu drogowego. Liczba popełnionych przez nie błędów przedstawiona jest w poniższej tabeli: <table><tr><td>Liczba błędów</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>Liczba osób</td><td>11</td><td>8</td><td>14</td><td>7</td><td>6</td><td>4</td></tr></table> a) Oblicz średnią liczbę błędów popełnionych przez zdającego. b) Ile procent zdających zdało egzamin, jeśli można było popełnić co najwyżej dwa błędy? c) Przedstaw dane na diagramie kolumnowym i zaznacz na nim średnią obliczoną w punkcie a). <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz modę i medianę zestawu danych: 3, 2, 2, 5, 4, 5, 1, 2, 6, 8. <u>Zadanie 3.</u>	Liczba błędów	0	1	2	3	4	5	Liczba osób	11	8	14	7	6	4	W klasie IIIa liczącej 28 osób z ostatniego sprawdzianu z matematyki było 13 ocen dopuszczających, a pozostałe oceny to dostateczne i dobre. Średnia ocen ze sprawdzianu wyniosła 2,75. Oblicz: a) liczbę ocen dobrych i dostatecznych ze sprawdzianu; b) odchylenie standardowe od średniej ocen; wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku. <u>Zadanie 2.</u> Wiadomo, że wariancję zestawu danych $x_1, x_2, \dots, x_n$ możemy obliczyć ze wzoru: $(1) \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$ lub ze wzoru $(2) \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2,$ gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb
Liczba błędów	0	1	2	3	4	5									
Liczba osób	11	8	14	7	6	4									

Producent czekolady deklaruje, że tabliczka ma wagę $150 \text{ g} \pm 2 \text{ g}$. Dla zbadania jakości pewnej partii czekolady organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek czekolady z tej partii i otrzymała następującą ich wagę (w gramach): 150,4 148,9 150,1 152,8 146,6 154,3 150,8 151,1 150,6 149,5 Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady i odchylenie standardowe w badanej próbie. Zastanów się, czy organizacja konsumencka powinna zwrócić się do producenta z reklamacją dotyczącą tej partii tabliczek czekolady.	$x_1, x_2, \dots, x_n$. Wykaż, że wzory (1) i (2) są równoważne.	
---	---	--