

1. Geometria płaska – trójkąty

Tematyka zajęć:

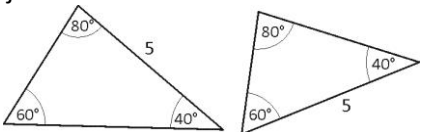
- Podział trójkątów. Suma kątów w trójkącie. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie
- Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa
- Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie
- Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie
- Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt
- Przystawanie trójkątów
- Podobieństwo trójkątów

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział trójkątów ze względu na boki i kąty; – wie, ile wynosi suma miar kątów w trójkącie i w czworokącie; – zna warunek na długość odcinków, z których można zbudować trójkąt; – zna twierdzenie dotyczące odcinka łączącego środki dwóch boków trójkąta i potrafi je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie Pitagorasa i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i wykorzystuje je do sprawdzenia, czy dany trójkąt jest prostokątny; – umie określić na podstawie długości boków trójkąta, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny; – umie narysować wysokości w trójkącie i wie, że	Uczeń: – zna zależności między bokami w trójkącie (nierówności trójkąta) i stosuje je przy rozwiązywaniu zadań; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie; – zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną; – potrafi obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny i długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym, mając dane długości boków trójkąta; – potrafi udowodnić proste własności trójkątów, wykorzystując cechy przystawania trójkątów; – potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczących trójkątów, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń; – potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną. – potrafi udowodnić twierdzenie o stycznej i siecznej.

wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie; – zna twierdzenie o środkowych w trójkącie oraz potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie środka ciężkości trójkąta; – zna twierdzenie o symetralnych boków w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia się dwusiecznych kątów w trójkącie jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna i stosuje przy rozwiązywaniu prostych zadań własności trójkąta równobocznego: długość wysokości w zależności od długości boku, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; – zna i stosuje własności trójkąta prostokątnego: suma miar kątów ostrych trójkąta, długość wysokości w trójkącie prostokątnym równoramiennym w zależności od długości przyprostokątnej; długość promienia okręgu opisanego na trójkącie i długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt w zależności od długości boków trójkąta, zależność między długością środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego a długością przeciwprostokątnej; – zna podstawowe własności trójkąta równoramiennego i stosuje je przy rozwiązywaniu	końców odcinka; – potrafi uzasadnić, że każdy punkt należący do dwusiecznej kąta leży w równej odległości od ramion tego kąta; – potrafi udowodnić twierdzenie o symetralnych boków i twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – umie udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i okręgów opisanych na trójkącie; – potrafi stosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązania zadań z wykorzystaniem innych, wcześniej poznanych własności; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące trójkątów, z zastosowaniem poznanych do tej pory twierdzeń; – zna twierdzenie o stycznej i siecznej oraz potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań geometrycznych.	
--	---	--

prostych zadań; – zna trzy cechy przystawiania trójkątów i potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna cechy podobieństwa trójkątów; potrafi je stosować do rozpoznawania trójkątów podobnych i przy rozwiązywaniu prostych zadań; – umie obliczyć skalę podobieństwa trójkątów podobnych.		
--	--	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest dwa razy większy niż kąt przy wierzchołku. Wyznacz kąty tego trójkąta. <u>Zadanie 2.</u> Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu mierzonej w calach (1 cal = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala. <u>Zadanie 3.</u> Dane są odcinki długości a, b oraz c. Skonstruuj odcinek długości: $\frac{\sqrt{3}ac}{\sqrt{2}b}$. <u>Zadanie 4.</u> Czy poniższe trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij. 	<u>Zadanie 1.</u> Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i obrano na przedłużeniach punkty D i E tak, że $AD = AC$ oraz $BE = BC$. Oblicz miarę kąta DCE. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie boki mają długość: 17 cm, 25 cm, 28 cm. a) Sprawdź, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny. b) Oblicz długość wysokości poprowadzonej na najdłuższy bok. c) Podaj długość odcinków, na jakie spodek wysokości podzielił najdłuższy bok trójkąta. <u>Zadanie 4.</u> Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym	<u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta ma długość a. Jaką długość ma wysokość opuszczona na podstawę? <u>Zadanie 3.</u> Niech a, b, c będą długościami boków w dowolnym trójkącie. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$. <u>Zadanie 4.</u> Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = AC$ oraz $\angle ABC = 3 \angle BAC$. Wykaż, że jeżeli półproste $BK \rightarrow$ i $BL \rightarrow$ dzielą kąt $\angle ABC$ na trzy równe części ($\angle LBC = \frac{1}{3} \angle ABC$), to trójkąty BCL, BCK,
--	---	---

Zadanie 5.

W trójkącie ABC dane są długości boków:

$|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm. Punkt D

dzieli bok AB na takie dwa odcinki, że

$|AD| : |DB| = 3 : 5$. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku AC , która przecięła bok BC w punkcie E . Oblicz długości odcinków: CE , BE i DE .

Zadanie 6.

W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 4 cm. Spodek

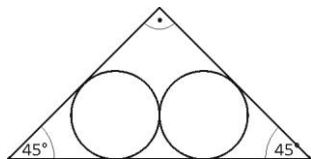
tej wysokości leży w odległości $1\frac{1}{6}$ cm od środka

okręgu opisanego na trójkącie. Oblicz:

- długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie;
- długość boków tego trójkąta.

Zadanie 7.

W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano dwa okręgi, styczne zewnętrznie do siebie, każdy o promieniu 1 cm (jak na rysunku poniżej).



Oblicz obwód tego trójkąta.

dwusieczne kątów przy podstawie są równej długości.

Zadanie 5.

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne

mają długość: $|AB| = 32$ cm, $|AC| = 24$ cm.

Symetralna boku BC przecina ten bok w punkcie D , bok AB w punkcie E i przedłużenie boku AC w punkcie F . Udowodnij, że trójkąt EBD jest podobny do trójkąta EAF i oblicz skalę tego podobieństwa.

Zadanie 6.

Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkty P , Q , R leżą na bokach trójkąta ABC (po jednym na każdym boku) w taki sposób, że każdy bok trójkąta PQR jest prostopadły do jednego boku trójkąta ABC .

a) Wykaż, że trójkąt PQR jest równoboczny.

b) Wyznacz stosunek $\frac{|AB|}{|PQ|}$.

Zadanie 7.

Dany jest okrąg o promieniu 3. Z punktu P oddalonego od środka okręgu o 5 poprowadzono styczną do okręgu oraz sieczną przecinającą okrąg w punktach A i B tak, że $|BP| : |AP| = 3 : 2$. Oblicz długość odcinka AB .

BKA są równoramienne.

Zadanie 5.

Okręgi o promieniach długości 2 cm i 3 cm są styczne zewnętrznie w punkcie A . Znajdź odległość punktu A od prostej, do której nie należy punkt A , a która jest styczna jednocześnie do obu okręgów.

2. Trygonometria

Tematyka zajęć:

- Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym
- Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów 30° , 45° , 60°
- Kąt skierowany
- Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne
- Wzory redukcyjne

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków; – potrafi korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); – zna wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne; – potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – zna definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dowolnego kąta wypukłego; – potrafi wyznaczyć (korzystając z definicji) wartości funkcji trygonometrycznych takich kątów wypukłych, jak: 120°, 135°, 150°; – zna znaki funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych, różnych od 90°; zna wartości funkcji	Uczeń: – zna pojęcie kąta skierowanego; – wie, co to jest miara główna kąta skierowanego i potrafi ją wyznaczyć dla dowolnego kąta; – zna definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dowolnego kąta; – umie podać znaki wartości funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach; – potrafi obliczyć, na podstawie definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 210°, 240°, 315°, 330° itd.; – umie zbudować w układzie współrzędnych dowolny kąt o mierze α, gdy dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej tego kąta; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (dla dowolnego kąta, dla którego funkcje trygonometryczne są określone) – zna i potrafi stosować wzory redukcyjne; – potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne;	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie sinusów; – potrafi udowodnić twierdzenie cosinusów; – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.

trygonometrycznych (o ile istnieją) kątów o miarach: 0°, 90°, 180°; – potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego, gdy dana jest jedna z nich; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (w odniesieniu do kąta wypukłego): $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$ – zna wzory redukcyjne dla kąta $90^\circ - \alpha$, $90^\circ + \alpha$ oraz $180^\circ - \alpha$; – potrafi stosować poznane wzory redukcyjne w obliczaniu wartości wyrażeń; – potrafi zastosować poznane wzory redukcyjne w zadaniach geometrycznych; – potrafi zbudować kąt wypukły znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.	– zna twierdzenie sinusów i potrafi je stosować w zadaniach geometrycznych; – zna twierdzenie cosinusów i potrafi stosować je w zadaniach geometrycznych; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności, wykorzystując także wcześniej poznaną wiedzę o figurach geometrycznych.	
---	---	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Oblicz wartość wyrażenia: $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie prostokątnym ABC dane są: długość przeciwprostokątnej $BC = \sqrt{146}$ cm oraz długość przyprostokątnej $AB = 5$ cm. a) Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.	<u>Zadanie 1.</u> Zbuduj kąt o mierze α takiej, że a) $\sin \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{7}$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α. <u>Zadanie 2.</u> Posługując się wzorem $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, oblicz	<u>Zadanie 1.</u> Wiedząc, że $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz: a) $\sin \alpha - \cos \alpha$, b) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$; c) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$. <u>Zadanie 2.</u>
---	--	---

b) Oblicz miary kątów ostrych trójkąta (skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych). c) Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną oraz cosinus kąta, jaki tworzy ta wysokość z krótszą przyprostokątną. <u>Zadanie 3.</u> Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma wieża? <u>Zadanie 4.</u> Wyznacz, korzystając z definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°. <u>Zadanie 5.</u> Oblicz, stosując odpowiednie wzory redukcyjne, wartość wyrażenia: a) $\sin 135^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$ b) $\sin^2 17^\circ + \sin^2 73^\circ - \cos 120^\circ$. <u>Zadanie 6.</u> Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora: $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ$. <u>Zadanie 7.</u> Niech α, β, γ oznaczają miary kątów dowolnego trójkąta. Wykaż, że prawdziwa jest zależność: $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta + \gamma}{2}$.	$\sin 15^\circ$. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie prostokątnym a, b oznaczają długości przyprostokątnych, α jest miarą kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości a. Wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, oblicz: a) tangens α; b) wartość wyrażenia: $\frac{b}{a+b} + \frac{a^2}{a^2 - b^2}$. <u>Zadanie 4.</u> Sprawdź, czy równość $\frac{\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia. <u>Zadanie 5.</u> Oblicz wartość wyrażenia: $\sin 960^\circ \cdot \operatorname{tg} 420^\circ - \cos 1410^\circ$. <u>Zadanie 6.</u> Oblicz długość środkowej CD w trójkącie ABC, jeśli dane są długości boków trójkąta: $a = 5$, $b = 6$, $c = 10$. <u>Zadanie 7.</u> W trójkącie ABC dane są długości boków: $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3 - \sqrt{3}$. Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta oraz promień koła	Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się na wysokości h metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie t sekund - powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością v wznosi się balon? <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta oraz $a < \frac{b+c}{2}$, to miary kątów α, β, γ, leżących naprzeciw tych boków, spełniają nierówność $\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$.
--	--	---

<u>Zadanie 8.</u> Zbuduj kąt o mierze α, $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ takiej, że a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $\operatorname{ctg} \alpha = -4$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α. <u>Zadanie 9.</u> Oblicz wartość wyrażenia $\frac{5\sin \alpha - 4\cos \alpha}{3\cos \alpha + 8\sin \alpha}$ wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.	opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 8.</u> W pewnym trójkącie miary kątów α, β, γ spełniają warunek: $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$. Wykaż, że trójkąt ten jest prostokątny.	
---	---	--

3. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta

Tematyka zajęć:

- Pole figury geometrycznej
- Pole trójkąta, cz. 1
- Pole trójkąta, cz. 2
- Pola trójkątów podobnych
- Pole koła, pole wycinka koła

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – rozumie pojęcie pola figury; zna wzór na pole kwadratu i pole prostokąta; – zna następujące wzory na pole trójkąta: $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, gdzie a – długość boku trójkąta równobocznego	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na pole trójkąta równobocznego i wzory: $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$; $P = \frac{1}{2} p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$, ze wzoru $P = \frac{1}{2} a h_a$; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie Talesa z wykorzystaniem pól odpowiednich trójkątów; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń.

$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a,$ $P = a \cdot b \cdot \sin \gamma, \text{ gdzie } \gamma \in (0^\circ, 180^\circ)$ $P = \frac{abc}{4R},$ $P = \frac{1}{2} p \cdot r, \text{ gdzie } p = \frac{a+b+c}{2}$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ gdzie } p = \frac{a+b+c}{2};$ – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na pole trójkąta i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi obliczyć wysokość trójkąta, korzystając ze wzoru na pole; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz własności okręgu wpisanego w trójkąt i okręgu opisanego na trójkącie; – zna twierdzenie o polach figur podobnych; potrafi je stosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna wzór na pole koła i pole wycinka koła; umie zastosować te wzory przy rozwiązywaniu prostych zadań; – wie, że pole wycinka koła jest wprost proporcjonalne do miary odpowiadającego mu kąta środkowego koła i jest wprost proporcjonalne do długości odpowiadającego mu łuku okręgu oraz umie zastosować tę wiedzę przy rozwiązywaniu prostych zadań.	o średnim stopniu trudności, stosując wzory na pola trójkątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej własności trójkątów; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne, wykorzystując cechy podobieństwa trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych; – rozwiązuje zadania dotyczące trójkątów, w których wykorzystuje twierdzenia poznane wcześniej (tw. Pitagorasa, tw. Talesa, – tw. sinusów, tw. cosinusów, twierdzenia o kątach w kole, itp.) – potrafi dowodzić twierdzenia, w których wykorzystuje pojęcie pola.	
--	---	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 1,12 m i polu 504 cm² wycięto koło, styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła. <u>Zadanie 2.</u> Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz: a) pole trójkąta; b) długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; c) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie dwa boki mają długość 12 cm i 10 cm, zaś kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 150°. Oblicz pole tego trójkąta. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 6 cm i 8 cm. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej. <u>Zadanie 5.</u> Kąt wpisany w koło ma miarę 45° i jest oparty na łuku długości 3π cm. Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten łuk.	<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie, którego pole jest równe 27 cm², dwa boki mają długość 18 cm i 6 cm. a) Jaką miarę ma kąt zawarty między tymi bokami? b) Oblicz długość trzeciego boku trójkąta. c) Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Pamiętaj o rozważeniu dwóch przypadków. <u>Zadanie 3.</u> Na trójkącie ABC, w którym AC = BC , opisano okrąg o środku O i promieniu R = 20 cm. Wiedząc, że ∠AOB = 120°, oblicz pole trójkąta oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Rozważ dwa przypadki. <u>Zadanie 4.</u> W trójkącie równoramiennym podstawa ma 16 cm długości, a ramię ma 17 cm długości. Oblicz odległość środka wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta od ramienia trójkąta. <u>Zadanie 5.</u> Prosta równoległa do podstawy AB trójkąta ABC, przecinająca ramiona AC i BC odpowiednio w punktach D i E, dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. W jakim stosunku (licząc od	<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD oraz CE, które przecięły się w punkcie M. Wiedząc, że AD · CE = √3 oraz ∠MAC + ∠ACM = 60° wykaż, że pole trójkąta ABC wynosi 1. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz długość boku c trójkąta, jeśli dane są długości a, b dwóch jego boków oraz wiadomo, że h_a + h_b = h_c, gdzie h_a, h_b, h_c są długościami wysokości opuszczonych na odpowiednie boki tego trójkąta. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt prostokątny jest styczny do przeciwprostokątnej w punkcie dzielącym ją na dwa odcinki, których iloczyn długości jest równy polu tego trójkąta. <u>Zadanie 4.</u> Wykaż, że pole trójkąta wyraża się wzorem: $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie a, b, c oznaczają długości boków trójkąta, R – długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. <u>Zadanie 5.</u> W trójkącie rozwartokątnym ABC (kąt BCA jest rozwarty) długości boków wynoszą: AB = c,
---	---	--

<u>Zadanie 6.</u> Trójkąt równoboczny $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $s = 3$. Pole trójkąta ABC jest równe $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz długość boku trójkąta $A'B'C'$.	wierzchołka C) dzieli ona ramiona trójkąta? <u>Zadanie 6.</u> W wycinek koła o promieniu 6 cm wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole wycinka koła. <u>Zadanie 7.</u> W trójkącie ABC dane są: $\angle ACB = 120^\circ$, $AC = b$, $BC = a$. Wykaż, że odcinek dwusiecznej kąta ACB zawarty w trójkącie ma długość $\frac{a \cdot b}{a + b}$.	$AC = b$ oraz $BC = a$, gdzie $0 < a < b < c$. Pole tego trójkąta wynosi 3. Wykaż, że $AC > \sqrt{6}$.
--	---	---

4. Funkcja i jej własności

Tematyka zajęć:

- Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Dziedzina i zbiór wartości funkcji
- Sposoby opisywania funkcji
- Wykres funkcji
- Dziedzina funkcji liczbowej
- Zbiór wartości funkcji liczbowej
- Miejsce zerowe funkcji
- Monotoniczność funkcji
- Funkcje różnowartościowe
- Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu
- Szkicowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach
- Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności.
- Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu funkcji

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić funkcję od innych przyporządkowań; – potrafi podawać przykłady funkcji; – potrafi opisywać funkcje na różne sposoby: wzorem, tabelką, grafem, opisem słownym; – potrafi naszkicować wykres funkcji liczbowej określonej słownie, grafem, tabelką, wzorem; – potrafi odróżnić wykres funkcji od krzywej, która wykresem funkcji nie jest; – zna wykresy funkcji, takich jak: $y = x$, $y = x^2$,	Uczeń: – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunkcji warunków, dotyczących mianowników lub pierwiastków stopnia drugiego, występujących we wzorze; – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji opisanej wzorem; – wie, jakie funkcje nazywamy równymi; – zna definicję funkcji parzystej oraz nieparzystej; – wie, jaką funkcję nazywamy okresową;	Uczeń: – rozwiązuje zadania dotyczące funkcji o podwyższonym stopniu trudności.

$y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$; – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem (w prostych przypadkach); – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej (w prostych przypadkach); – potrafi obliczyć wartość funkcji liczbowej dla danego argumentu, a także obliczyć argument funkcji, gdy dana jest jej wartość; – potrafi określić zbiór wartości funkcji w prostych przypadkach (np. w przypadku, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem skończonym); – potrafi na podstawie wykresu funkcji liczbowej odczytać jej własności, takie jak: – dziedzina funkcji – zbiór wartości funkcji – miejsce zerowe funkcji – argument funkcji, gdy dana jest wartość funkcji – wartość funkcji dla danego argumentu – przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca, stała – zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne – najmniejszą oraz największą wartość funkcji; – potrafi interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji lub ich wzorów (np. dotyczące różnych zjawisk przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych); – potrafi przetwarzać informacje dane w postaci wzoru lub wykresu funkcji; – umie na podstawie wykresów funkcji f i g podać zbiór rozwiązań równania $f(x) = g(x)$ oraz nierów-	– potrafi podać własności funkcji okresowej na podstawie jej wykresu; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dane funkcje są równe; – potrafi zbadać na podstawie definicji parzystość (nieparzystość) danej funkcji; – potrafi zbadać na podstawie definicji monotoniczność danej funkcji; – potrafi udowodnić na podstawie definicji różnowartościowość danej funkcji; – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji w przedziale domkniętym; – posługuje się wykresami funkcji: $y = \text{reszta z dzielenia } x \text{ przez } 3$, gdzie $x \in \mathbf{C}$, $y = \text{sgn } x$, $y = [x]$, $y = x - [x]$, $y = \max(5, x)$, $y = \min(x, 2x + 1)$; – potrafi stosować wiadomości o funkcji do opisywania zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym; – potrafi podać opis matematyczny prostej sytuacji w postaci wzoru funkcji; – potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami ciągłej na podstawie wzoru tej funkcji; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kawałkami ciągłej omówić jej własności; – potrafi naszkicować wykres funkcji o zadanych własnościach.	
---	--	--

ności typu: $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$.		
--	--	--

Przykładowe zadania

Zadanie 1.

Dana jest funkcja określona za pomocą opisu słownego: „Każdej liczbie ze zbioru $A = \{0, 1, 4, 9, 16\}$ przyporządkowujemy pierwiastek kwadratowy tej liczby”. Zapisz tę funkcję za pomocą wzoru, a następnie naszkicuj jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych. Podaj zbiór wartości tej funkcji i jej miejsce zerowe.

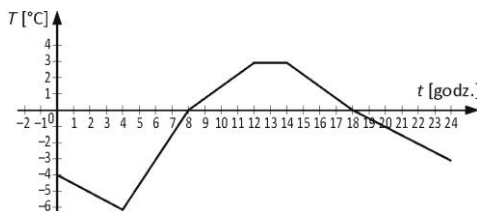
Zadanie 2.

Dana jest funkcja o wzorze $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{-x}}$.

- Określ dziedzinę tej funkcji.
- Czy funkcja ta posiada miejsce zerowe? Odpowiedź uzasadnij.
- Oblicz wartość funkcji dla argumentu (-9) .

Zadanie 3.

Poniżej podany jest dobowy wykres temperatury.



Odpowiedz na pytania:

- W jakich godzinach dokonywano pomiaru?
- W jakim przedziale mieszczą się zanotowane temperatury?

Zadanie 1.

- Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem

$$f(x) = \sqrt{3-2x} + \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-x}.$$

- Wyznacz miejsce zerowe funkcji o wzorze

$$f(x) = \frac{|x+2|-1}{x^2-1}.$$

Zadanie 2.

Naszkicuj wykres funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -6, 6 \rangle$; zbiorem wartości jest przedział $\langle 1, +\infty \rangle$; wykres funkcji jest symetryczny względem osi OY ; funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -6, 0 \rangle$ oraz $f(0) = 4$. Czy istnieje tylko jedna taka funkcja?

Zadanie 3.

Naszkicuj wykres i omów własności funkcji określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq -2 \\ x^3 & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

- Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $3\frac{3}{8}$.
- Dla jakiego dodatniego argumentu a zachodzi równość $f(a) = -f(-a)$?

Zadanie 4.

W pewnym kraju obowiązuje system podatkowy opisany wzorem:

Zadanie 1.

Przedstaw funkcję określoną wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x-3}, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\},$$

w postaci sumy funkcji parzystej i nieparzystej.

Zadanie 2.

Wykaż, że funkcja określona wzorem

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$$

przyjmuje największą wartość równą 4, a najmniejszą równą 2.

Zadanie 3

Wykaż, że funkcja określona wzorem

$$f(x) = 3 - 2x^3$$

- malejąca,
- różnowartościowa.

c) W jakich godzinach temperatura wyniosła 0°? d) W jakich godzinach temperatura była dodatnia, a w jakich ujemna? e) W jakich godzinach temperatura rosła, a w jakich malała? f) Jaką wartość miała temperatura w godzinach $\langle 12, 14 \rangle$? g) Jaką najniższą wartość wskazał termograf? <u>Zadanie 4.</u> Odległość d [km] ustalonego kolarza peletonu od mety w zależności od czasu jazdy t [h] (od chwili rozpoczęcia wyścigu do chwili przejechania mety) opisuje wzór: $d(t) = 180 - 45t$. a) Ile godzin potrzeba, aby kolarz przejechał linię mety wyścigu? b) W jakiej odległości od mety będzie znajdował się kolarz po 40 minutach jazdy? c) Po jakim czasie od startu kolarz będzie znajdował się 30 km od mety? d) Jaką długość ma etap wyścigu? <u>Zadanie 5.</u> Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż: a) równanie $x^2 = x$ b) nierówność $\frac{1}{x} > x^3$.	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq 800 \\ 0,05x - 40 & \text{dla } 800 < x \leq 2000 \\ 0,2x - 340 & \text{dla } x > 2000 \end{cases}$ gdzie x – oznacza wysokość dochodów rocznych podatnika w dolarach, zaś $f(x)$ oznacza wysokość podatku, jaki zobowiązany jest zapłacić podatnik. Oblicz, który z podatników zapłaci większy podatek i o ile procent większy, jeśli dochód roczny pierwszego z nich wyniósł 1260 USD, zaś drugiego 3480 USD. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. <u>Zadanie 5.</u> Wykaż na podstawie definicji, że funkcja określona wzorem: a) $f(x) = x^2 - 2x$ jest rosnąca w zbiorze $(1, +\infty)$; b) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$ jest różnowartościowa; c) $f(x) = \frac{4x^4 - 5x^2}{x^2 - 1}$ jest parzysta. <u>Zadanie 6.</u> Wyznacz najmniejszą oraz największą wartość funkcji $f(x) = (2x - 3)^2$ w przedziale $\langle -4, 6 \rangle$.	
--	---	--

5. Przekształcenia wykresów funkcji

Tematyka zajęć:

- Podstawowe informacje o wektorze w układzie współrzędnych
- Przesunięcie równoległe o wektor $\vec{u} = [p, q]$
- Symetria osiowa względem osi OX i osi OY
- Symetria środkowa względem punktu $(0, 0)$

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna określenie wektora i potrafi podać jego cechy; – potrafi obliczyć współrzędne wektora, mając dane współrzędne początku i końca wektora; – potrafi obliczyć współrzędne początku wektora (końca wektora), gdy dane ma współrzędne wektora oraz współrzędne końca (początku) wektora; – potrafi wyznaczyć długość wektora (odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej); – zna określenie wektorów równych i wektorów przeciwnych oraz potrafi stosować własności tych wektorów przy rozwiązywaniu zadań; – potrafi wykonywać działania na wektorach: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie przez liczbę (analitycznie); – potrafi obliczyć współrzędne środka odcinka; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii osiowej względem osi OX oraz osi OY; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii środkowej	Uczeń: – zna własności działań na wektorach i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ sporządzić wykresy funkcji: $y = f(x)$, $y = f(x)$, $y = k \cdot f(x)$, $k \neq 0$ oraz $y = f(k \cdot x)$, $k \neq 0$; – potrafi naszkicować wykres funkcji, którego sporządzenie wymaga kilku poznanych przekształceń; – potrafi przeprowadzić dyskusję rozwiązań równania z parametrem $f(x) = m$, w oparciu o wykres funkcji f; – potrafi stosować własności przekształceń geometrycznych przy rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania (o podwyższonym stopniu trudności), dotyczące przekształceń wykresów funkcji oraz własności funkcji.

względem punktu (0,0); – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w przesunięciu równoległym o dany wektor; – potrafi narysować wykres funkcji $y = f(x) + q$, $y = f(x - p)$, $y = f(x - p) + q$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ oraz $y = -f(-x)$ w przypadku, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$; (potrafi narysować wykresy funkcji określonych wzorami, np.: $y = (x + 3)^2; y = \sqrt{x} - 4; y = -\frac{1}{x};$ $y = (x - 1)^2 - 5, y = -\sqrt{-x}, y = \frac{1}{x - 2} + 3);$ – umie podać własności funkcji: $y = f(x) + q$, $y = f(x - p)$, $y = f(x - p) + q$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, – $y = -f(-x)$ w oparciu o dane własności funkcji $y = f(x)$; – potrafi zapisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f przez symetrię osiową względem osi OX, symetrię osiową względem osi OY, symetrię środkową względem początku układu współrzędnych, przesunięcie równoległe o dany wektor.		
---	--	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Dane są punkty: $A(2, 5)$, $B(-4, 6)$. a) Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$. b) Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$. c) Wyznacz współrzędne środka odcinka AB.	<u>Zadanie 1.</u> Dany jest odcinek o końcach $A(2, -5)$, $B(-4, 7)$. Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek AB w taki sposób, że $\frac{ PB }{ AB } = \frac{1}{3}$. <u>Zadanie 2.</u>	<u>Zadanie 1.</u> W jaki sposób przekształcić wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{4x - 3} + 2$? <u>Zadanie 2.</u>
--	---	---

Zadanie 2.

Dane są wektory: $\vec{a} = [1, -1]$, $\vec{b} = [2, -1]$,
 $\vec{c} = [-5, -7]$. Wyznacz takie liczby rzeczywiste k, l ,
aby $k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = \vec{c}$.

Zadanie 3.

W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj odcinek AB , gdzie $A(-2, 4)$, $B(-5, -3)$, a następnie wyznacz współrzędne końców obrazu tego odcinka:

- w symetrii względem osi OX
- w symetrii względem osi OY
- w symetrii względem początku układu współrzędnych
- w przesunięciu równoległym o wektor

$$\vec{u} = [1, -3].$$

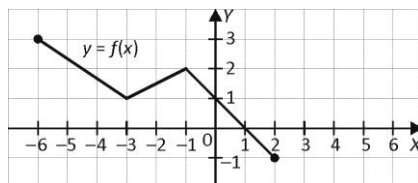
Zadanie 4.

Dana jest funkcja $f(x) = x^3$. Naszkicuj wykres funkcji:

- $y = x^3 + 2$;
- $y = (x + 1)^3$;
- $y = -x^3$;
- $y = (x - 1)^3 - 4$.

Zadanie 5.

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.



- Napisz wzór funkcji g , której wykres powstanie w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f wzdłuż osi OX o 4 jednostki w prawo. Jakie miejsca zerowe ma

O jaki wektor należy przesunąć równolegle wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 3$, aby otrzymać wykres funkcji:

- $g(x) = \sqrt{x} + 1$
- $h(x) = \sqrt{x+2}$?

Zadanie 3.

Dana jest funkcja $g(x) = 2x - 6$. Jej wykres powstał w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wyznacz wzór funkcji f .

Zadanie 4.

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ naszkicuj wykresy funkcji:

- $y = 3 - \sqrt{x+2}$
- $y = \sqrt{-x+2} + 1$
- $y = |\sqrt{x} - 4|$
- $y = \frac{1}{4}\sqrt{|x|}$

Zadanie 5.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x - 2|$. Na podstawie wykresu tej funkcji rozwiąż:

- równania: $|x - 2| = 3$; $|x - 2| = x$
- nierówności: $|x - 2| \leq 2$; $|x - 2| > x^2$.

Zadanie 6.

Funkcja $y = f(x)$ jest określona w zbiorze $\mathbf{R}$ i jest okresowa o okresie podstawowym równym 6. Wyznacz okres podstawowy funkcji

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 1$, a następnie na jego podstawie, sporządź wykres funkcji $g(x) = 4 - f(|-x + 1|)$. Podaj wzór funkcji g .

Zadanie 3.

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{|x|-1}$, a następnie:

- podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g
- podaj przedziały monotoniczności funkcji g
- wykaż, że funkcja g jest parzysta
- podaj zbiór rozwiązań nierówności $\frac{2}{|x|-1} \geq |x|$.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $|3 - |x - 2|| = m + 7$ ma więcej rozwiązań dodatnich niż ujemnych.

funkcja g? b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji h, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f w symetrii względem osi OX.	$g(x) = f\left(\frac{2}{3}x\right)$. <u>Zadanie 7.</u> W oparciu o wykres odpowiedniej funkcji podaj liczbę rozwiązań równania, w zależności od wartości parametru m: a) $x - 5 - 2 = m$ b) $\left \frac{1}{x} - 2\right = m + 4$.	
--	---	--

6. Funkcja liniowa

Tematyka zajęć:

- Proporcjonalność prosta
- Funkcja liniowa. Wykres funkcji liniowej
- Miejsce zerowe funkcji liniowej. Własności funkcji liniowej
- Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej
- Równoległość i prostokątność wykresów funkcji liniowych o współczynnikach kierunkowych różnych od zera
- Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego
- Równanie liniowe i nierówność liniowa z jedną niewiadomą
- Równania i nierówności z wartością bezwzględną
- Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem
- Zastosowanie układów równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych
- Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi i jej interpretacja geometryczna. Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi

- Zastosowanie układów nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – wie, jaką zależność między dwiema wielkościami zmiennymi nazywamy proporcjonalnością prostą; – potrafi wskazać współczynnik proporcjonalności; – rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem proporcjonalności prostej; – zna pojęcie funkcji liniowej; – potrafi interpretować współczynniki we wzorze funkcji liniowej; – potrafi sporządzić wykres funkcji liniowej danej wzorem; – potrafi na podstawie wykresu funkcji liniowej (wzoru funkcji) określić monotoniczność funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie i graficznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne); – potrafi sprawdzić algebraicznie, czy punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej; – potrafi podać własności funkcji liniowej na podstawie wykresu tej funkcji; – wie, że współczynnik kierunkowy a we wzorze funkcji $y = ax + b$ oznacza tangens kąta nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi OX; – wie, że współczynnik kierunkowy a we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ wyraża się wzorem $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,	Uczeń: – potrafi udowodnić, na podstawie definicji, niektóre własności funkcji liniowej, takie jak: monotoniczność, różnowartościowość itp.; – potrafi przeprowadzić dowód warunku na prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach różnych od zera; – potrafi rozwiązywać zadania z wartością bezwzględną i parametrem dotyczące własności funkcji liniowej; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności liniowe z wartością bezwzględną i interpretować je graficznie; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem (z dwoma parametrami); – potrafi wyznaczyć wszystkie wartości parametru, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej z parametrem, jest podany zbiór; – potrafi rozwiązywać układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą wyznacznikową; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem, stosując metodę wyznacznikową; – potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną oraz zinterpretować go graficznie; – potrafi wykreślać w prostokątnym układzie	Uczeń: – rozwiązuje zadania nietypowe o podwyższonym stopniu trudności.

gdzie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ są punktami należącymi do wykresu tej funkcji; – potrafi znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach (np. takiej, której wykres przechodzi przez dwa dane punkty; jest nachylony do osi OX pod danym kątem i przechodzi przez dany punkt); – potrafi napisać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami liniowej i na jego podstawie omówić własności danej funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie miejsca zerowe funkcji kawałkami liniowej oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji i osi OY; – potrafi wyznaczyć algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja kawałkami liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne); – potrafi obliczyć wartość funkcji kawałkami liniowej dla podanego argumentu; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi określić, na podstawie wzorów dwóch funkcji liniowych, wzajemne położenie ich wykresów; – potrafi stosować wiadomości o funkcji liniowej do opisu zjawisk z życia codziennego (podać opis matematyczny zjawiska w postaci wzoru funkcji liniowej, odczytać informacje z wykresu lub wzoru, zinterpretować je, przeanalizować i przetworzyć); – potrafi rozwiązać równanie liniowe z jedną	współrzędnych zbiory punktów opisane równaniem, nierównością, układem równań lub układem nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną; – potrafi stosować wiedzę o układach nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań („programowanie liniowe”).	
--	--	--

niewiadomą; – potrafi rozwiązać nierówność liniową z jedną niewiadomą i przedstawić jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej; – potrafi rozwiązać układ nierówności liniowych z jedną niewiadomą; – potrafi interpretować graficznie równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać algebraicznie proste równania i nierówności z wartością bezwzględną i interpretować je graficznie np. $x - 2 - 1 = 3$, $x + 4 > 2x + 3$; – zna pojęcia równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – wie, że wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest prosta; – zna pojęcie układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozpoznać układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny i umie podać ich interpretację geometryczną; – potrafi rozwiązywać algebraicznie (metodą przez podstawienie oraz metodą przeciwnych współczynników) układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do układów równań liniowych; – zna pojęcie nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi i potrafi interpretować geometrycznie taką nierówność; – potrafi przedstawić na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych, zbiór tych wszystkich punktów, których współrzędne spełniają dany układ nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi;		
--	--	--

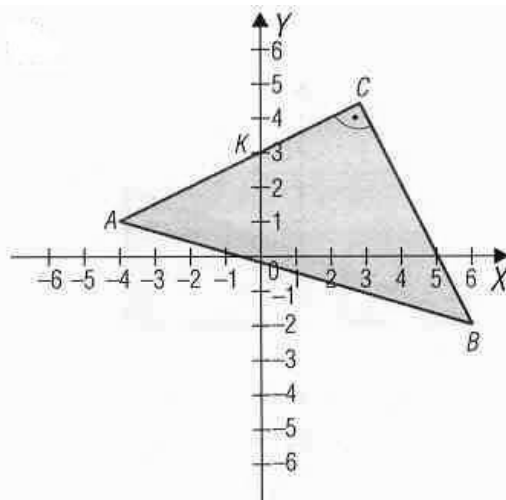
– potrafi opisać daną figurę geometryczną (np. kąt, trójkąt, czworokąt) przedstawioną w prostokątnym układzie współrzędnych, za pomocą odpowiedniego układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi;		
--	--	--

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ x-2 & \text{dla } x \in (1, +\infty) \end{cases}.$ a) Oblicz miejsca zerowe funkcji f oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY. b) Wyznacz algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne. c) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 6. d) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x); \text{ omów własności funkcji } y = g(x).$	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz te wartości parametru m, dla których funkcja liniowa $f(x) = (m - 3 - 5)x - m + 10$ jest rosnąca i nieparzysta. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $(4 - k^2)x + 1 + k > 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. <u>Zadanie 3.</u> Rozwiąż nierówność:	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz wzór funkcji liniowej f, która dla każdego $x \in \mathbf{R}$ spełnia warunek: $f(2x - 1) = -6x + 4$. <u>Zadanie 2.</u> Funkcję $y = \text{sgn}(a)$ (co oznacza znak liczby a), definiujemy następująco: $\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{dla } a > 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ -1 & \text{dla } a < 0 \end{cases}$ Na podstawie powyższej definicji naszkicuj wykres funkcji:
---	---	--

<u>Zadanie 2.</u> a) Napisz wzór funkcji liniowej f, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt $A(-\sqrt{3}, -2)$ i jest nachylony do osi OX pod kątem 120°. b) Napisz wzór funkcji liniowej g, której miejscem zerowym jest liczba 4 i której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji f. <u>Zadanie 3.</u> Rozwiąż nierówność $\sqrt{5}x > 4x - 1$. <u>Zadanie 4.</u> Klub sportowy przeznaczył na kupno 28 dresów kwotę w wysokości 2860 zł. Zamierza kupić dresy w dwóch gatunkach. Jaką liczbę dresów pierwszego gatunku może kupić ten klub, jeśli wiadomo, że dres pierwszego gatunku kosztuje 125 zł, a dres drugiego gatunku 80 zł? <u>Zadanie 5.</u>	$\sqrt{x^2 + 4x + 4} - 2x - 5 \geq x + 7.$ <u>Zadanie 4.</u> Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) układ równań z niewiadomymi x i y $\begin{cases} x - my = m \\ mx - y = 2 \end{cases}$ jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny? W przypadku istnienia rozwiązań, wyznacz je. <u>Zadanie 5.</u> Wyznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają układ nierówności $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ x \leq 4 \end{cases}.$ <u>Zadanie 6.</u> Mały zakład włókienniczy produkuje dwa rodzaje swetrów (damskie i męskie) z dwóch rodzajów wełny (czarnej i białej). Do produkcji jednego swetra damskiego potrzeba 20 dag wełny czarnej i 40 dag	$f(x) = -2\operatorname{sgn}(-3x + 1) + 5.$
---	--	---

Opisz za pomocą układu nierówności zbiór przedstawiony na rysunku.



Dane: $A(-4, 1)$, $K(0, 3)$

$B(6, -2)$, $|\angle ACB| = 90^\circ$

wełny białej, a do produkcji swetra męskiego — 60 dag wełny czarnej i 20 dag wełny białej. Zasoby wełny czarnej wynoszą 120 kg, natomiast białej 140 kg. Zysk osiągany ze sprzedaży swetra męskiego wynosi 38 zł, a ze sprzedaży swetra dla pań — 44 zł. Ile i jakie swetry powinien wyprodukować ten zakład, aby osiągnąć jak największy zysk?

