

Wymagania na egzamin poprawkowy z matematyki dla klasy I A LO (Rok szkolny 2015/16)

Wykaz zakładanych osiągnięć ucznia klasy I liceum

(osiągnięcia ucznia w zakresie podstawowym)

I. Liczby rzeczywiste. Język matematyki.

Uczeń:

- podaje przykłady liczb: naturalnych, całkowitych, wymiernych, niewymiernych, pierwszych i złożonych oraz przyporządkowuje liczbę do odpowiedniego zbioru liczb,
- porównuje liczby wymierne,
- przedstawia liczby wymierne w różnych postaciach (ułamek zwykły, dziesiętny),
- wykonuje obliczenia na liczbach wymiernych i rzeczywistych,
- wyznacza przybliżenia liczby rzeczywistej zadaną dokładnością (również przy użyciu kalkulatora),
- wykonuje działania na potęgach o wykładnikach całkowitych,
- oblicza wartości pierwiastków, w tym również pierwiastków nieparzystego stopnia z liczb ujemnych,
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka,
- szacuje wyniki obliczeń zadaną dokładnością,
- posługuje się pojęciami procentu i punktu procentowego w rozwiązywaniu zadań praktycznych,
- wykonuje działania na wyrażeniach algebraicznych (w tym stosuje wzory skróconego mnożenia).
- zapisuje przedział liczbowy i przedstawia go na osi liczbowej,
- zaznacza na osi liczbowej zbiory określone koniunkcją lub alternatywą równań oraz nierówności,
- wyznacza wartość bezwzględną liczby rzeczywistej oraz stosuje jej interpretację geometryczną,
- wyznacza błąd bezwzględny oraz błąd względny przybliżenia liczby.

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

- potrafi wykonywać działania na potęgach o wykładniku naturalnym, całkowitym i wymiernym;
- zna prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i stosuje je w obliczeniach;
- potrafi zapisać liczbę w notacji wykładniczej;
- sprawnie sprowadza wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci i oblicza ich wartości dla podanych wartości zmiennych;
- potrafi posługiwać się wzorami skróconego mnożenia:
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
- i wykonuje działania na wyrażeniach, które zawierają wymienione wzory skróconego mnożenia;
- potrafi usuwać niewymierność z mianownika ułamka, stosując wzór skróconego mnożenia (różnicę kwadratów dwóch wyrażeń);
- zna pojęcie pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej i potrafi stosować prawa działań na pierwiastkach w obliczeniach;
- potrafi obliczać pierwiastki stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
- zna definicję logarytmu i potrafi obliczać logarytmy bezpośrednio z definicji;
- sprawnie przekształca wzory matematyczne, fizyczne i chemiczne; - zna pojęcie średniej arytmetycznej, średniej ważonej i średniej geometrycznej liczb oraz potrafi obliczyć te średnie dla

podanych liczb.

III. Pojęcia wstępne z geometrii .

Uczeń:

- zna określenie kąta i podział kątów ze względu na ich miarę;
- zna pojęcie kątów przyległych i kątów wierzchołkowych oraz potrafi zastosować własności tych kątów w rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna pojęcie dwusiecznej kąta i symetralnej odcinka, potrafi zastosować własność dwusiecznej kąta oraz symetralnej odcinka w rozwiązywaniu prostych zadań,
- umie skonstruować dwusieczną danego kąta i symetralną danego odcinka;
- zna własności kątów utworzonych między dwiema prostymi równoległymi, przeciętymi trzecią prostą i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; potrafi uzasadnić równoległość dwóch prostych, znajdując równe kąty odpowiadające;
- zna twierdzenie Talesa; potrafi je stosować do obliczania długości odcinka w prostych zadaniach;
- zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa i potrafi je stosować do uzasadnienia równoległości odpowiednich odcinków lub prostych;
- zna wnioski z twierdzenia Talesa i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna definicję koła i okręgu, poprawnie posługuje się terminami: promień, środek okręgu, cięciwa, średnica, łuk okręgu;
- potrafi określić wzajemne położenie prostej i okręgu;
- zna definicję stycznej do okręgu;
 - posługuje się terminami: kąt wpisany w koło, kąt środkowy koła; zna twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych i umie je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań.

IV. Geometria płaska – trójkąty

Uczeń:

- zna podział trójkątów ze względu na boki i kąty;
- wie, ile wynosi suma miar kątów w trójkącie i w czworokącie;
- zna warunek na długość odcinków, z których można zbudować trójkąt;
- zna twierdzenie dotyczące odcinka łączącego środki dwóch boków trójkąta i potrafi je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna twierdzenie Pitagorasa i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i wykorzystuje je do sprawdzenia, czy dany trójkąt jest prostokątny;
- umie narysować wysokości w trójkącie i wie, że wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie;
- zna twierdzenie o środkowych w trójkącie oraz potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu zadań;
- zna pojęcie środka ciężkości trójkąta;
- zna twierdzenie o symetralnych boków w trójkącie;
- wie, że punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie i potrafi skonstruować ten okrąg;
- wie, że punkt przecięcia się dwusiecznych kątów w trójkącie jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i potrafi skonstruować ten okrąg;
- zna i stosuje przy rozwiązywaniu prostych zadań własności trójkąta równobocznego: długość wysokości w zależności od długości boku, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt;
- zna i stosuje własności trójkąta prostokątnego: suma miar kątów ostrych trójkąta, długość wysokości w trójkącie prostokątnym równoramiennym w zależności od długości przyprostokątnej; długość promienia okręgu opisanego na trójkącie i długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt w zależności od długości boków trójkąta, zależność między długością środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego a długością przeciwprostokątnej;
- zna podstawowe własności trójkąta równoramiennego i stosuje je przy rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna trzy cechy przystawiania trójkątów i potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna cechy podobieństwa trójkątów; potrafi je stosować do rozpoznawania trójkątów podobnych i

- przy rozwiązywaniu prostych zadań;
 – umie obliczyć skalę podobieństwa trójkątów podobnych.

V. Trygonometria.

Uczeń:

Uczeń:

- potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków;
- potrafi korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
- zna wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 30° , 45° , 60° ;
- potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne;
- potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach 30° , 45° , 60° ;
- potrafi wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych takich kątów wypukłych, jak: 120° , 135° , 150° ;
- potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego, gdy dana jest jedna z nich;
- zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (w odniesieniu do kąta wypukłego):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

- zna wzory redukcyjne dla kąta $90^\circ - \alpha$, $90^\circ + \alpha$ oraz $180^\circ - \alpha$;
- potrafi stosować poznane wzory redukcyjne w obliczaniu wartości wyrażeń;
- potrafi zastosować poznane wzory redukcyjne w zadaniach geometrycznych;
- potrafi zbudować kąt wypukły znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.

VI. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta.

Uczeń:

- rozumie pojęcie pola figury; zna wzór na pole kwadratu i pole prostokąta;
- zna następujące wzory na pole trójkąta:

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ gdzie } a - \text{długość boku trójkąta równobocznego}$$

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a,$$

$$P = a \cdot b \cdot \sin \gamma, \text{ gdzie } \gamma \in (0^\circ, 180^\circ)$$

$$P = \frac{abc}{4R},$$

$$P = \frac{1}{2} p \cdot r, \text{ gdzie } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ gdzie } p = \frac{a+b+c}{2};$$

- potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na pole trójkąta i poznane wcześniej twierdzenia;
- potrafi obliczyć wysokość trójkąta, korzystając ze wzoru na pole;
- potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz własności okręgu wpisanego w trójkąt i okręgu opisanego na trójkącie;
- zna twierdzenie o polach figur podobnych; potrafi je stosować przy rozwiązywaniu prostych zadań;
- zna wzór na pole koła i pole wycinka koła; umie zastosować te wzory przy rozwiązywaniu prostych zadań;
- wie, że pole wycinka koła jest wprost proporcjonalne do miary odpowiadającego mu kąta środkowego koła i jest wprost proporcjonalne do długości odpowiadającego mu łuku okręgu oraz umie zastosować tę wiedzę przy rozwiązywaniu prostych zadań.

Zadania przykładowe

I. Liczby rzeczywiste. Język matematyki.

1. Dane są zbiory $A = (-2, 1)$, $B = (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ oraz C – zbiór liczb całkowitych. Wyznacz zbiory:
 $A \cap C$, $A - B$, $A \cup B$, $B - A$, $B \cap A$.
2. Wypisz elementy zbiorów:
 $A = \{x: x \in C \wedge x^2 \leq 16\}$ i $B = \{x: x \in C \wedge (x^2 = 16 \vee x^2 = 9)\}$.
Wyznacz zbiór $A - B$.
3. Liczba 3 jest przybliżeniem z nadmiarem liczby 2,56. Oblicz błąd względny tego przybliżenia.
4. Bank podniósł oprocentowanie lokat o 2 punkt procentowy i obecnie wynosi ono 12% w skali roku. O ile procent bank podniósł oprocentowanie lokat. Wykonaj stosowne obliczenia.
5. Wyznacz 100 liczb wymiernych x , dla których spełniona jest nierówność
 $\frac{1}{9} < x < \frac{3}{17}$
6. Oblicz wartość wyrażenia: $|\sqrt{2} - 2\sqrt{3}| - 2|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$.
7. Dane jest równanie z niewiadomą x : $(2x + a)(9x + 6) = 43 + 2(3x + 1)(a + 1)$. Wyznacz wartość liczby a , dla której liczba 3 jest rozwiązaniem tego równania.
8. Rozwiąż nierówności i zapisz zbiory rozwiązań za pomocą przedziałów:
a) $\frac{3-8x}{4} - \frac{5-x}{2} \leq -1$
b) $2x - 3 < -x + 9 < x + 11$.
9. Rozwiąż równanie $2x - 15 = \sqrt{3}x - 6$.
10. Po dwukrotnej podwyżce towaru, za każdym razem o ten sam procent, jego cena końcowa jest o 19% mniejsza od ceny początkowej. O ile procent dokonywano każdorazowo podwyżki ceny towaru?

II. Wyrażenia algebraiczne.

1. Zapisz w postaci sumy algebraicznej: $(3x + 1 + y)^2$
2. Oblicz połowę sumy: $4^{28} + 4^{28} + 4^{28} + 4^{28}$
3. Rozwiąż nierówność: $(2x - 3)^2 - (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) > 3(x^2 + 20)$ i zapisz zbiór rozwiązań w postaci przedziału.
4. Oblicz: $(0,027)^{-\frac{1}{3}} - (-0,2)^{-2} \cdot 16^{-0,25} + \left(1\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$
5. Rozwiąż równanie: $x + 3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}x$.
Rozwiązanie przedstaw w postaci: $a + b\sqrt{c}$ gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$.

6. Wykaż, że liczba $6^{20} + 3 \cdot 6^{19} - 4 \cdot 6^{18}$ jest podzielna przez 5.
7. Wiedząc, że : $x^2 + y^2 = 3$ i $x + y = 2$ oblicz $x \cdot y$.
8. Uzasadnij, że jeżeli dwie kolejne liczby całkowite nie dzielą się przez 3, to różnica kwadratów tych liczb jest podzielna przez trzy.

III. Pojęcia wstępne z geometrii

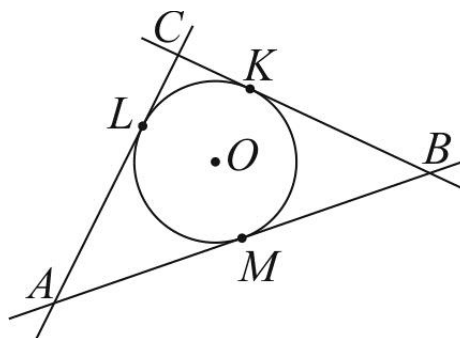
1. Kąt przyległy do kąta α ma miarę 4 razy większą od kąta α . Zatem:
 A. $\alpha = 18^\circ$ B. $\alpha = 36^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha = 54^\circ$
2. Łuk okręgu o promieniu 2 ma długość π . Ile procent długości okręgu stanowi długość tego łuku?

A. $\frac{2}{\pi} \cdot 100\%$ B. 50% C. $\frac{1}{\pi} \cdot 100\%$ D. 25%

3. Styczne do okręgu w punktach K, L, M przecinają się w punktach

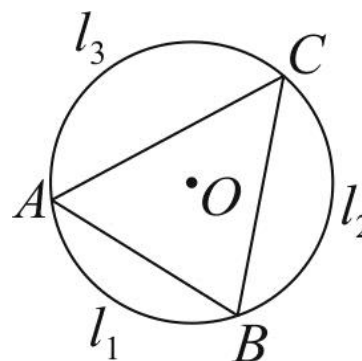
A, B, C , jak na rysunku obok. Wiadomo, że $|AC| = |BC| = 5$ oraz obwód trójkąta ABC jest równy 18. Z tego wynika, że:

A. $|CL| = 0,5$ B. $|CL| = 1$
 C. $|CL| = 1,5$ D. $|CL| = 2$

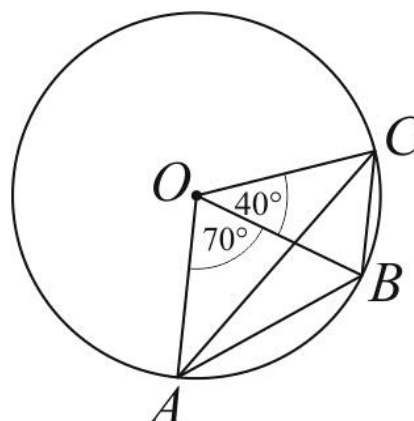


4. Na rysunku obok punkty A, B, C dzielą okrąg na trzy łuki, których stosunek długości wyraża zależność: $l_1 : l_2 : l_3 = 4 : 5 : 6$. Z tego wynika, że:

A. $|\angle ACB| = 48^\circ$ B. $|\angle ACB| = 54^\circ$ C. $|\angle ACB| = 60^\circ$ D. $|\angle ACB| = 72^\circ$



5. Na rysunku obok dane są miary kątów środkowych: $|\angle AOB| = 70^\circ$, $|\angle BOC| = 40^\circ$. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .

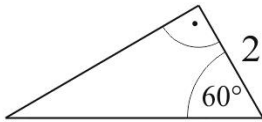


6. W trapezie równoramiennym podstawy mają długość 5 cm i 10 cm, a wysokość trapezu jest równa 4 cm. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie P . Wyznacz odległość punktu P od podstaw tego trapezu.

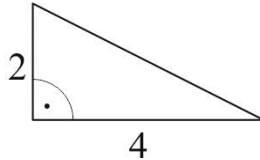
IV. Geometria płaska – trójkąty

1. Zależność między miarami kątów trójkąta ABC jest następująca
 $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 1 : 5$. Zatem:
 A. $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 140^\circ$ B. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 100^\circ$
 C. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\gamma = 150^\circ$ D. $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $\gamma = 120^\circ$
2. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach długości 8 cm, 15 cm, 17 cm jest równy:
 A. 3 cm B. 2,5 cm C. 2 cm D. 1,5 cm
3. Dane są trzy trójkąty (zobacz rysunki I, II, III).

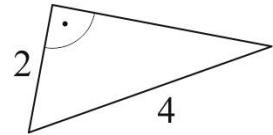
I.



II.



III.



Na podstawie danych na rysunkach I, II i III można stwierdzić, że trójkąty są przystające:

- A. tylko na rysunkach I i II B. tylko na rysunkach II i III
 C. tylko na rysunkach I i III D. na rysunkach I, II, III.
4. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ jest o 20 cm dłuższy od obwodu trójkąta ABC . Wiadomo, że trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali 3. Zatem obwód trójkąta ABC jest równy:
 A. 10 cm B. 15 cm C. 30 cm D. 40 cm
5. Symetralne boków trójkąta przecięły się w punkcie należącym do jednego z jego boków. Zatem trójkąt ten jest: A. ostrokątny
 B. prostokątny C. rozwartokątny D. równoramienny
6. Okrąg opisany na trójkącie prostokątnym ma długość 16π cm. Wobec tego długość środkowej poprowadzonej na przeciwprostokątną w tym trójkącie jest równa:
 A. 4 cm B. 4π cm C. 8 cm D. 16 cm
7. Jeden z boków trójkąta ma długość 32, a długość wysokości i środkowej poprowadzonych do tego boku są równe odpowiednio 5 i 13. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta.
8. (4 pkt) W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną AB na odcinki długości 9 cm i 16 cm. Oblicz:
 a) $|CD|$
 b) długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

9. (5 pkt) Dany jest trójkąt rozwartokątny równoramienny, którego boki mają długość 16 cm, 10 cm, 10 cm.

Wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

V. Trygonometria.

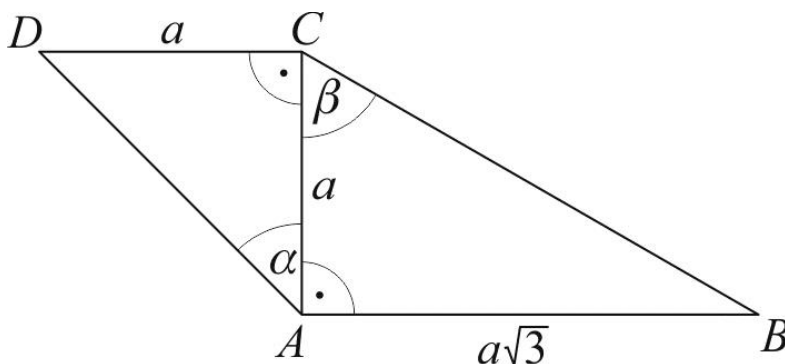
1. Na rysunku obok przedstawiony jest czworokąt $ABCD$, w którym

$$|DC| = |AC| = a \text{ oraz}$$

$$|AB| = a\sqrt{3}.$$

Przekątna AC tworzy z bokiem AD kąt ostry α , zaś z bokiem CB kąt ostry β oraz $AC \perp DC$ i $AC \perp AB$.

Wobec tego $\sin \alpha + \cos \beta$ ma wartość:



A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

B. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

2. Wiadomo, że $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) - 3\cos \alpha = -1$. Zatem:

A. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D.

$\operatorname{tg} \alpha = 1$.

3. W trójkącie prostokątnym ABC dane są długości boków: $|AB| = 2$, $|BC| = \sqrt{7}$, $|AC| = \sqrt{3}$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Zatem:

A. $\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$

B. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{4}{7}$

C. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{7\sqrt{3}}{6}$

D. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

4. Jeśli $\sin \alpha = 0,8$ oraz $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, to:

A. $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

B. $\cos \alpha = \frac{5}{3}$

C. $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$

D.

$\cos \alpha = 0,75$.

5. Wiadomo, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$. Wobec tego wartość wyrażenia $\frac{4\sin \alpha + 5\cos \alpha}{\cos \alpha - 3\sin \alpha}$ jest równa:

A. $\frac{2}{29}$

B. 14,5

C. $-2\frac{1}{11}$

D. $6\sqrt{3}$.

6. Wartość wyrażenia $(\cos 150^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ)^2$ wynosi:

A. $6\frac{3}{4}$

B. 0,75

C. $\frac{13+4\sqrt{3}}{4}$

D. $4 - 2\sqrt{3}$.

7. W prostokącie $ABCD$ przekątne mają długość 10 i przecinają się pod takim kątem α ,

że $\cos \alpha = 0,4$. Oblicz:

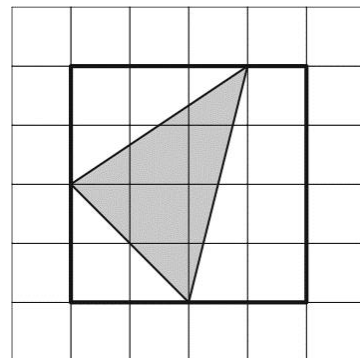
- odległość wierzchołka A od przekątnej BD
- tangens kąta nachylenia przekątnej BD do boku AB .

8. Podstawy trapezu mają długości 6 i 12 a ramiona są nachylone do dłuższej podstawy pod kątami 30° i 45° . Oblicz pole i obwód trapezu.

VI. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta.

1. Na rysunku obok dany jest kwadrat, którego bok ma długość 4. Pole trójkąta zaznaczonego kolorem szarym jest równe:

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6



2. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki mające długość 3 cm i 12 cm. Pole tego trójkąta jest więc równe:

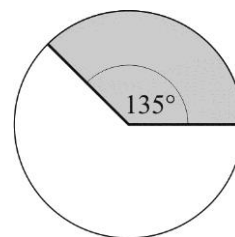
- A. 30 cm^2 B. 35 cm^2 C. 40 cm^2 D. 45 cm^2

3. Pole trójkąta równobocznego jest równe 3. Zatem bok tego trójkąta ma długość:

- A. $2\sqrt{3}$ B. $2^4\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $3^4\sqrt{3}$

4. Na rysunku obok zaznaczony jest w kole wycinek, któremu odpowiada kąt środkowy 135° . Pole wycinka jest równe 21π . Zatem pole koła wynosi:

- A. 56π B. 60π C. 63π D. 64π



5. Trójkąt $A_1B_1C_1$ o polu 54 cm^2 jest podobny do trójkąta ABC o polu 16 cm^2 . Skala podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC jest równa:

- A. $\frac{27}{8}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

6. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 48 \text{ cm}$, $|AC| = |BC| = 26 \text{ cm}$. Oblicz:

- pole trójkąta ABC
- promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC
- promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .

- 7.** Cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie E , $|\angle AEC| = 45^\circ$. Wiedząc, że $|AE| = 4$, $|CE| = 2$, $|ED| = 3$, oblicz:
- a) pole trójkąta AEC
 - b) pole trójkąta BED .
- 8.** Najkrótszy bok trójkąta ABC ma 10 cm długości, a miary jego kątów są w stosunku $3 : 2 : 1$. Oblicz:
- a) pole trójkąta ABC
 - b) pole koła wpisanego w trójkąt ABC .